

Obsah

1	Hilbertovy prostory	7
1.1	Základní vlastnosti Hilbertových prostorů	7
1.2	Lineární operátory	11
1.3	Ortonormální množiny	15
1.4	Lineární rovnice a vlastní čísla	17
2	Zobecněné funkce	21
2.1	Fyzikální motivace zavedení zobecněných funkcí	21
2.2	Zavedení zobecněných funkcí	22
2.2.1	Prostor testovacích funkcí	22
2.2.2	Definice zobecněných funkcí	24
2.3	Základní vlastnosti zobecněných funkcí	26
2.3.1	Matematické operace se zobecněnými funkcemi	26
2.3.2	Derivace zobecněné funkce	27
2.3.3	Tenzorový součin zobecněných funkcí	29
2.3.4	Konvoluce zobecněných funkcí	32
3	Fourierova transformace	37
3.1	Prostor testovacích funkcí pomalého růstu $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	37
3.2	Prostor zobecněných funkcí pomalého růstu $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	38
3.3	Fourierova transformace	41
3.3.1	Fourierova transformace funkcí z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	41
3.3.2	Fourierova transformace zobecněných funkcí z $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	42
4	Řešení diferenciálních rovnic pomocí zobecněných funkcí	47
4.1	Řešení lineárních diferenciálních rovnic	47
4.1.1	Fundamentální řešení diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty	48
4.1.2	Řešení nehomogenní rovnice	49
4.1.3	Metoda sestupu	50
4.2	Fundamentální řešení některých typů rovnic	51
4.2.1	Obyčejná lineární diferenciální rovnice	51
4.2.2	Fundamentální řešení operátoru rovnice vedení tepla	51
4.2.3	Fundamentální řešení operátoru vlnové rovnice	52
4.2.4	Fundamentální řešení Laplaceova operátoru	54
4.3	Řešení Cauchyovy úlohy	54
4.3.1	Cauchyova úloha pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty	54
4.3.2	Cauchyova úloha pro rovnici vedení tepla	55
4.3.3	Cauchyova úloha pro vlnovou rovnici	56
5	Integrální rovnice	59
5.1	Metoda postupných aproximací	60
5.1.1	Integrální rovnice se spojitým jádrem	60
5.1.2	Iterovaná jádra a rezolventa	62
5.1.3	Volterrovy integrální rovnice	63

5.2	Fredholmovy věty	65
5.2.1	Integrální rovnice s degenerovaným jádrem	65
5.2.2	Fredholmovy věty pro integrální rovnice s degenerovaným jádrem	66
5.2.3	Fredholmovy věty pro integrální rovnice se spojitým jádrem	68
5.2.4	Důsledky Fredholmových vět	70
5.3	Integrální rovnice se spojitým hermitovským jádrem	71
5.4	Hilbertova–Schmidtova věta a její důsledky	73
5.4.1	Hilbertova–Schmidtova věta pro spojitě hermitovské jádro	73
5.4.2	Důsledky Hilbertovy–Schmidtovy věty	75
5.4.3	Řešení nehomogenní rovnice se spojitým hermitovským jádrem	77
5.4.4	Pozitivně definitní jádra	79
6	Okrajové úlohy pro eliptické rovnice	81
6.1	Úloha na vlastní hodnoty	81
6.1.1	Greenovy vzorce	81
6.1.2	Vlastnosti operátoru L	82
6.1.3	Vlastnosti vlastních hodnot a funkcí operátoru L	83
6.2	Sturm–Liouvillova úloha	85
6.2.1	Greenova funkce	86
6.2.2	Převod Sturm–Liouvillový úlohy na integrální rovnici	88
6.2.3	Vlastnosti vlastních hodnot a funkcí	89
6.2.4	Hledání vlastních hodnot a funkcí	90
6.3	Fourierova metoda pro úlohu hledání vlastních hodnot	90
6.3.1	Obecné schéma Fourierovy metody	91
6.3.2	Příklady na použití Fourierovy metody	91
7	Smíšená úloha	95
7.1	Fourierova metoda pro smíšenou úlohu	95
7.1.1	Homogenní hyperbolická rovnice	95
7.1.2	Nehomogenní hyperbolická rovnice	97
7.1.3	Parabolická rovnice	98
7.2	Smíšená úloha pro rovnici hyperbolického typu	99
7.2.1	Klasické řešení a integrál energie	99
7.2.2	Jednoznačnost a spojitá závislost klasického řešení	100
7.2.3	Funkce spojitě v $L^2(G)$	103
7.2.4	Zobecněné řešení	104
7.2.5	Jednoznačnost a spojitá závislost zobecněného řešení	106
7.2.6	Existence zobecněného řešení	107
7.2.7	Existence klasického řešení	108
7.3	Smíšená úloha pro rovnice parabolického typu	108
7.3.1	Klasické řešení a princip maxima	108
7.3.2	Jednoznačnost a spojitost klasického řešení	109
7.3.3	Zobecněná řešení	111
7.3.4	Existence zobecněného řešení	112
7.3.5	Existence klasického řešení	112