

# OBSAH

Značky a symboly . . . . .	5
Predhovor . . . . .	11
1 Úvod . . . . .	13
1.1 Predmet a metódy mechaniky . . . . .	13
1.2 Základné pojmy . . . . .	13
1.2.1 Priestor . . . . .	14
1.2.2 Čas . . . . .	15
1.2.3 Hmotnosť . . . . .	15
1.2.4 Sila . . . . .	16
1.3 Newtonove zákony . . . . .	17
1.4 Mechanické veličiny . . . . .	17
1.5 Systémové zatriedenie predmetu . . . . .	19
1.6 Vývoj mechaniky . . . . .	20
2 Úvod do statiky. Rovinná sústava síl . . . . .	23
2.1 Silové sústavy. Princípy a axiómy statiky . . . . .	23
2.1.1 Ekvivalencia a rovnováha síl . . . . .	23
2.1.2 Princípy a axiómy statiky . . . . .	25
2.1.2.1 Princíp superpozície . . . . .	25
2.1.2.2 Princíp úmernosti . . . . .	26
2.1.2.3 Axiómy statiky . . . . .	26
2.2 Sily pôsobiace v tom istom lúči . . . . .	27
2.3 Dve rôznobežné sily pôsobiace v tom istom bode . . . . .	28
2.3.1 Určenie výslednice . . . . .	28
2.3.2 Podmienky rovnováhy . . . . .	30
2.3.3 Rozklad sily . . . . .	31
2.4 Sústava síl pôsobiaca v spoločnom bode . . . . .	31
2.4.1 Určenie výslednice . . . . .	31
2.4.2 Podmienky rovnováhy . . . . .	34
2.4.3 Rozklad sily . . . . .	35
2.5 Statický moment sily . . . . .	35
2.6 Momentová (Varignonova) veta . . . . .	37
2.7 Dvojica síl v rovine . . . . .	38
2.7.1 Vlastnosti dvojice síl . . . . .	40
2.7.2 Skladanie dvojíc síl v rovine . . . . .	41
2.8 Sila a dvojica síl v rovine. Redukcia sily k bodu . . . . .	42
2.9 Všeobecná rovinná sústava síl . . . . .	43
2.9.1 Určenie výslednice . . . . .	43
2.9.2 Podmienky rovnováhy . . . . .	46
2.9.3 Rozklad sily na tri zložky . . . . .	47

2.9.4	Výslednicová čiara. Grafické určenie výslednice . . . . .	49
2.10	Podmienky ekvivalencie a rovnováhy dvoch silových sústav . . . . .	52
2.11	Statický stred sústavy rovnobežných síl . . . . .	53
	<i>Priklady</i> . . . . .	53
3	<i>Priestorová sústava síl</i> . . . . .	60
3.1	Sústava síl pôsobiaca v spoločnom bode v priestore . . . . .	60
3.1.1	Stanovenie výslednice . . . . .	61
3.1.2	Podmienky rovnováhy a ekvivalencie . . . . .	64
3.1.3	Rozklad síly . . . . .	66
3.2	Statický moment síly . . . . .	67
3.2.1	Statický moment síly k bodu . . . . .	67
3.2.2	Statický moment síly k osi . . . . .	70
3.2.3	Statický moment síly k súradnicovým osiam a ich začiatku . . . . .	73
3.3	Dvojica síl v priestore . . . . .	75
3.3.1	Moment dvojice síl k bodu . . . . .	75
3.3.2	Moment dvojice síl k osi . . . . .	76
3.3.3	Vlastnosti dvojice síl . . . . .	77
3.3.4	Sústava dvojíc síl v priestore . . . . .	78
3.4	Dvojica síl a sila v priestore . . . . .	82
3.5	Redukcia sústavy síl k bodu . . . . .	84
3.6	Všeobecná priestorová sústava síl . . . . .	92
3.6.1	Určenie výslednice . . . . .	93
3.6.2	Podmienky rovnováhy . . . . .	94
3.6.3	Rozklad síly do šiestich mimobežných smerov . . . . .	96
3.7	Transformačné vzťahy silových vektorov . . . . .	98
3.7.1	Translácia súradnicovej sústavy . . . . .	100
3.7.2	Rotácia súradnicovej sústavy . . . . .	101
3.7.3	Všeobecné premiestnenie súradnicovej sústavy . . . . .	103
3.8	Sústava rovnobežných síl v priestore . . . . .	104
3.8.1	Určenie výslednice . . . . .	104
3.8.2	Podmienky rovnováhy . . . . .	106
3.8.3	Rozklad síly . . . . .	107
3.8.4	Statický stred sústavy rovnobežných síl . . . . .	108
	<i>Priklady</i> . . . . .	108
4	<i>Ťažisko. Kvadratické momenty. Momenty zotrvačnosti a deviačné momenty</i> . . . . .	116
4.1	Ťažisko . . . . .	116
4.1.1	Ťažisko rovinných čiar . . . . .	116
4.1.2	Ťažisko rovinných plôch . . . . .	117
4.1.3	Ťažisko priestorových čiar . . . . .	120
4.1.4	Ťažisko priestorovej plochy . . . . .	120
4.1.5	Ťažisko telies . . . . .	121
	<i>Priklady</i> . . . . .	122
4.2	Kvadratické momenty rovinných obrazcov . . . . .	128
4.2.1	Definícia kvadratických momentov . . . . .	128
4.2.2	Kvadratické momenty k rovnobežným osiam — Steinerova veta . . . . .	130
4.2.3	Kvadratické momenty k pootočeným osiam . . . . .	131
4.2.4	Extrémy kvadratických momentov . . . . .	133
4.2.5	Elipsa zotrvačnosti . . . . .	137
	<i>Priklady</i> . . . . .	141
4.3	Momenty zotrvačnosti hmotného bodu, tuhej dosky a tuhého telesa . . . . .	146

4.3.1	Momenty zotrvačnosti hmotných bodov . . . . .	146
4.3.2	Momenty zotrvačnosti tuhých telies . . . . .	147
4.3.3	Tenzor zotrvačnosti . . . . .	150
4.3.4	Momenty zotrvačnosti k rovnobežným osiam . . . . .	152
4.3.5	Momenty zotrvačnosti k pootočeným osiam . . . . .	154
4.3.6	Elipsoid zotrvačnosti . . . . .	155
4.3.7	Hlavné momenty zotrvačnosti . . . . .	156
4.3.8	Momenty zotrvačnosti tuhej dosky . . . . .	158
	<i>Príklady</i> . . . . .	159
5	<i>Statika hmotného bodu</i> . . . . .	162
5.1	Stupeň voľnosti hmotného bodu . . . . .	162
5.1.1	Voľný hmotný bod v priestore . . . . .	162
5.1.2	Voľný hmotný bod v rovine . . . . .	162
5.1.3	Voľný hmotný bod na krivke . . . . .	163
5.2	Väzby hmotného bodu . . . . .	163
5.2.1	Kyvný prút . . . . .	163
5.2.2	Väzba na hladkú plochu . . . . .	164
5.2.3	Väzba na hladkú krivku . . . . .	165
5.2.4	Guľový kĺb . . . . .	167
5.3	Určenie reakcií . . . . .	167
5.4	Statická a kinematická určitosť . . . . .	168
	<i>Príklady</i> . . . . .	169
6	<i>Statika tuhej dosky a zložených rovinnych sústav</i> . . . . .	172
6.1	Statika tuhej dosky v rovine . . . . .	172
6.1.1	Stupeň voľnosti tuhej dosky . . . . .	172
6.1.2	Väzby tuhej dosky . . . . .	173
6.1.2.1	Kyvný prút . . . . .	173
6.1.2.2	Väzba na hladkú rovinu krivku . . . . .	173
6.1.2.3	Pevný kĺb . . . . .	174
6.1.2.4	Dokonalé votknutie . . . . .	175
6.1.3	Podopretie dosky a určenie reakcií . . . . .	175
6.1.4	Statická a kinematická určitosť . . . . .	177
6.2	Statika zloženej rovinnej sústavy . . . . .	178
6.2.1	Stupeň voľnosti a väzby zloženej sústavy . . . . .	178
6.2.2	Stupeň voľnosti voľnej zloženej rovinnej sústavy . . . . .	179
6.2.2.1	Sústava tuhých dosiek spojených pevným kĺbom . . . . .	179
6.2.2.2	Dve tuhé dosky spojené kyvným prútom . . . . .	180
6.2.2.3	Dve tuhé dosky spojené dvoma rôznobežnými kyvnými prútmami . . . . .	180
6.2.2.4	Dve tuhé dosky spojené dvoma rovnobežnými kyvnými prútmami . . . . .	181
6.2.3	Statická a kinematická určitosť . . . . .	182
6.2.4	Určenie reakcií . . . . .	183
6.2.4.1	Prvý spôsob určenia reakcií . . . . .	183
6.2.4.2	Druhý spôsob určenia reakcií . . . . .	183
	<i>Príklady</i> . . . . .	188
7	<i>Statika tuhého telesa</i> . . . . .	191
7.1	Väzby tuhého telesa . . . . .	192
7.1.1	Kyvný prút . . . . .	192

7.1.2	Väzba na hladkú plochu . . . . .	193
7.1.3	Väzba na hladkú krivku . . . . .	193
7.1.4	Guľový kĺb . . . . .	194
7.1.5	Posuvný valcový kĺb . . . . .	194
7.1.6	Neposuvný valcový kĺb . . . . .	195
7.1.7	Dokonalé votknutie . . . . .	196
7.2	Podopretie tuhého telesa . . . . .	196
7.2.1	Určenie reakcií . . . . .	196
7.2.2	Statická a kinematická určitosť . . . . .	197
7.3	Statika tuhej dosky v priestore . . . . .	198
7.3.1	Väzby tuhej dosky . . . . .	198
7.3.1.1	Kyvný prút a väzba na hladkú priamku . . . . .	198
7.3.1.2	Neposuvný valcový kĺb . . . . .	198
7.3.1.3	Dokonalé votknutie . . . . .	199
7.3.2	Podopretie tuhej dosky . . . . .	199
7.3.3	Určenie reakcií . . . . .	199
7.3.4	Statická a kinematická určitosť . . . . .	200
	<i>Priklady</i> . . . . .	200
8	<i>Analytická statika</i> . . . . .	202
8.1	Práca sily a statického momentu sily . . . . .	202
8.2	Princíp virtuálnych prác — Lagrangeov a Castiglianov variačný princíp . . . . .	203
8.2.1	Lagrangeov variačný princíp — princíp virtuálnych premiestnení . . . . .	203
8.2.2	Castiglianov variačný princíp — princíp virtuálnych síl . . . . .	204
8.3	Virtuálna práca sín pôsobiacich na hmotné objekty — princíp virtuálnych premiestnení . . . . .	204
8.3.1	Virtuálna práca sústavy sín pôsobiacich na hmotný bod . . . . .	204
8.3.2	Virtuálna práca rovinnej sústavy sín pôsobiacich v rovine tuhej dosky . . . . .	205
8.3.3	Virtuálna práca priestorovej sústavy sín pôsobiacich na tuhé teleso . . . . .	207
8.3.4	Virtuálna práca sústavy sín pôsobiacich na zloženú sústavu . . . . .	207
8.4	Použitie princípu virtuálnych premiestnení . . . . .	208
8.4.1	Virtuálne premiestnenie hmotného bodu v priestore a v rovine . . . . .	208
8.4.2	Virtuálne premiestnenie tuhej dosky v rovine . . . . .	208
8.4.2.1	Tuhá doska podopretá pevným kĺbom . . . . .	208
8.4.2.2	Tuhá doska podopretá dvoma rôznobežnými kyvnými prútmi . . . . .	209
8.4.2.3	Tuhá doska podopretá dvoma rovnobežnými kyvnými prútmi . . . . .	209
8.4.3	Virtuálne premiestnenie sústavy tuhých dosák v rovine . . . . .	209
8.4.3.1	Relatívne (vzájomné) stredy otáčania sústavy tuhých dosák . . . . .	210
8.4.3.2	Absolútne (okamihové) stredy otáčania sústavy tuhých dosák . . . . .	211
8.4.3.3	Kinematika premiestnenia sústavy tuhých dosák . . . . .	211
8.4.3.4	Závislosť virtuálnych premiestnení dvoch tuhých dosák . . . . .	213
8.5	Kinematická metóda výpočtu reakcií tuhých objektov a zložených rovinných sústav . . . . .	216
8.5.1	Výpočet reakcií vo väzbách hmotných bodov a tuhých dosák . . . . .	217
8.5.2	Výpočet reakcií rovinných zložených sústav . . . . .	217
	<i>Priklady</i> . . . . .	218
9	<i>Trenie</i> . . . . .	221
9.1	Druhy trenia . . . . .	221
9.2	Šmykové trenie . . . . .	221
9.2.1	Coulombove zákony . . . . .	222
9.2.2	Reakcia väzby pri šmykovom trení . . . . .	223
9.2.3	Teleso na naklonenej rovine . . . . .	225

9.3	Čapové trenie . . . . .	227
9.3.1	Axiálne čapy . . . . .	229
9.3.2	Radiálne čapy . . . . .	230
9.4	Trenie lana vedeného cez kladku . . . . .	231
9.5	Valivé trenie . . . . .	232
	<i>Príklady</i> . . . . .	234
10	<i>Pohyb voľného hmotného bodu</i> . . . . .	235
10.1	Úvod do kinematiky — kinematika bodu . . . . .	235
10.1.1	Pohyb bodu po priamke . . . . .	235
10.1.1.1	Rovnomerný pohyb . . . . .	236
10.1.1.2	Rovnomerne zrýchlený (spomalený) pohyb . . . . .	237
10.1.1.3	Voľný pád . . . . .	237
10.1.1.4	Zvislý vrh nahor v gravitačnom poli Zeme . . . . .	238
10.1.2	Pohyb bodu v rovine v kartziánskych súradničach . . . . .	239
10.1.2.1	Rýchlosť a zrýchlenie pohybu . . . . .	239
10.1.2.2	Tangenciálne a normálne zrýchlenie . . . . .	240
10.1.2.3	Šíkmý vrh . . . . .	242
10.1.2.4	Polárny hodograf rovinného pohybu . . . . .	244
10.1.2.5	Uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie . . . . .	246
10.1.3	Pohyb bodu v rovine v polárnych súradničach . . . . .	247
10.1.4	Pohyb bodu v priestore . . . . .	249
10.1.4.1	Pohyb bodu v priestore vo vektorovom tvarze . . . . .	249
10.1.4.2	Pohyb bodu v priestore v skalárnom tvarze . . . . .	255
10.1.4.3	Moment rýchlosťi a moment zrýchlenia, plošná rýchlosť a plošné zrýchlenie . . . . .	256
10.2	Úvod do dynamiky — dynamika voľného hmotného bodu . . . . .	258
10.2.1	Pohybové rovnice — pohyb hmotného bodu v silovom poli . . . . .	259
10.2.1.1	Pohyb hmotného bodu v silovom poli $\mathbf{F} = 0$ . . . . .	260
10.2.1.2	Pohyb hmotného bodu v silovom poli $\mathbf{F}$ = konšt . . . . .	260
10.2.2	Rovnovážna poloha hmotného bodu . . . . .	263
	<i>Príklady</i> . . . . .	263
11	<i>Práca, výkon, kinetická energia</i> . . . . .	268
11.1	Práca sily a momentu. Kinetická energia . . . . .	268
11.2	Výkon sily a momentu . . . . .	274
	<i>Príklady</i> . . . . .	275
12	<i>Silové pole. Potenciálna energia. Zákon zachovania energie</i> . . . . .	278
12.1	Konzervatívne silové pole. Potenciálna energia . . . . .	278
12.2	Gravitačné pole. Zákon zachovania mechanickej energie . . . . .	281
12.3	Plochy a krivky rovnakého potenciálu . . . . .	282
	<i>Príklady</i> . . . . .	284
13	<i>Impulz sily. Hybnosť hmotného bodu. Moment hybnosti</i> . . . . .	289
13.1	Impulz sily. Hybnosť hmotného bodu . . . . .	289
13.2	Moment hybnosti hmotného bodu . . . . .	290
	<i>Príklady</i> . . . . .	291

14	<i>Centrálny pohyb hmotného bodu</i>	294
14.1	Všeobecné vzťahy	294
14.2	Rovnomerný pohyb po kružnici	297
14.3	Planetárny pohyb. Keplerove zákony	300
	<i>Príklady</i>	304
15	<i>Kmitanie hmotného bodu</i>	308
15.1	Vlastné netlmené kmitanie	308
15.2	Vlastné tlmené kmitanie	311
15.3	Vynútené netlmené kmitanie	315
15.3.1	Budiaca sila harmonicky premenná	317
15.3.2	Budiaca sila periodického priebehu	322
15.4	Vynútené tlmené kmitanie	323
15.4.1	Budiaca sila harmonicky premenná	325
15.4.2	Budiaca sila periodického priebehu	330
	<i>Príklady</i>	331
16	<i>Pohyb viazaného hmotného bodu. Lagrangeove rovnice prvého druhu. Kyvadlá</i>	336
16.1	Druhy väzieb	336
16.2	Lagrangeova rovnica prvého druhu	338
16.3	Matematické kyvadlo	343
	<i>Príklady</i>	348
17	<i>Pohyb sústavy hmotných bodov</i>	350
17.1	Ťažisko sústavy hmotných bodov	350
17.2	Hybnosť sústavy hmotných bodov	352
17.3	Moment hybnosti sústavy hmotných bodov	356
17.4	Kinetická a potenciálna energia sústavy hmotných bodov	358
	<i>Príklady</i>	360
18	<i>D'Alembertov princíp. Lagrangeove rovnice druhého druhu. Hamiltonov princíp</i>	362
18.1	D'Alembertov princíp	362
18.2	Lagrangeove pohybové rovnice druhého druhu	363
18.3	Hamiltonov princíp	368
	<i>Príklady</i>	371
19	<i>Pohybové rovnice v neinerciálnej vzťažnej sústave</i>	374
19.1	Translačný pohyb neinerciálnej vzťažnej sústavy	374
19.2	Rotačný pohyb neinerciálnej vzťažnej sústavy	376
19.3	Všeobecný pohyb neinerciálnej vzťažnej sústavy	378
19.4	Pohyb na otáčajúcej sa Zemi	378
	<i>Príklady</i>	380
20	<i>Rovinný pohyb tuhej hmotnej dosky</i>	383
20.1	Kinematika tuhej dosky	383

20.1.1	Poloha, rýchlosť a zrýchlenie tuhej dosky . . . . .	383
20.1.2	Translačný a rotačný pohyb tuhej dosky . . . . .	385
20.1.3	Kinematická geometria tuhej dosky — poloidy . . . . .	387
20.2	Dynamika tuhej hmotnej dosky . . . . .	389
20.2.1	Pohybové rovnice voľnej, tuhej hmotnej dosky . . . . .	389
20.2.2	Kinetická a potenciálna energia tuhej hmotnej dosky . . . . .	391
20.2.3	Impulz momentu. Stred rázu . . . . .	392
20.2.4	D'Alembertov princíp pri riešení pohybu tuhej hmotnej dosky . . . . .	394
20.2.5	Viazaná tuhá hmotná doska. Fyzikálne kyvadlo . . . . .	394
	<i>Priklady</i> . . . . .	399
21	<i>Pohyb tuhého hmotného telesa</i> . . . . .	402
21.1	Kinematika tuhého telesa . . . . .	402
21.1.1	Premiestnenie tuhého telesa . . . . .	402
21.1.2	Rýchlosť a zrýchlenie tuhého telesa . . . . .	404
21.2	Dynamika tuhého hmotného telesa . . . . .	408
21.2.1	Hybnosť a moment hybnosti tuhého hmotného telesa . . . . .	408
21.2.1.1	Model telesa s diskrétnou rozloženou hmotou . . . . .	408
21.2.1.2	Model telesa so spojite rozloženou hmotou . . . . .	410
21.2.2	Pohybové rovnice tuhého hmotného telesa . . . . .	411
21.2.2.1	Model telesa s diskrétnou rozloženou hmotou . . . . .	411
21.2.2.2	Model telesa so spojite rozloženou hmotou . . . . .	413
21.2.3	Kinetická energia tuhého hmotného telesa . . . . .	414
21.2.4	Technická teória zotrvačníka . . . . .	415
	<i>Priklady</i> . . . . .	418
22	<i>Ráz telies</i> . . . . .	420
22.1	Ráz gúľ . . . . .	420
22.1.1	Základná charakteristika rázu dvoch gúľ . . . . .	420
22.1.2	Priamy ráz gúľ . . . . .	422
22.1.3	Šikmý ráz gúľ . . . . .	426
22.2	Ráz dosák v rovine ich pohybu . . . . .	428
22.2.1	Rázové impulzy . . . . .	428
22.2.2	Ráz dvoch dosák . . . . .	430
	<i>Priklady</i> . . . . .	433
	<i>Literatúra</i> . . . . .	435