

# Obsah

<b>4</b>	<b>Vícerozměrná linearita aneb lineární algebra podruhé</b>	<b>1</b>
4.1	Prostory s vektory	2
4.1.1	Algebraické struktury s jednou operací, hlavně grupy	3
4.1.2	Algebraické struktury se dvěma operacemi, hlavně pole	19
4.1.3	Co je vektorový prostor?	22
4.1.4	Jak počítat v bázích?	31
4.1.5	Menší vektorové prostory skryté ve větších	33
4.1.6	Cvičení	45
4.2	Lineární zobrazení vektorových prostorů	48
4.2.1	Lineární zobrazení algebraicky	50
4.2.2	Lineární zobrazení v bázích	55
4.2.3	Vektorové podprostory spjaté s lineárním zobrazením	61
4.2.4	Projekce	67
4.2.5	Vektorové prostory lineárních zobrazení	68
4.2.6	Cvičení	72
4.3	Vlastní vektory	74
4.3.1	Co jsou to vlastní vektory ...	75
4.3.2	... a jaké mají vlastnosti a jak je hledat?	76
4.3.3	Cvičení	85
<b>5</b>	<b>Souřadnicové soustavy obvyklejší i méně obvyklé</b>	<b>87</b>
5.1	Kartézská soustava souřadnic z jiného pohledu	88
5.1.1	Poloha bodu v rovině a prostoru	88
5.1.2	Souřadnicové přímky a roviny	89
5.1.3	Elementární plocha a objem	91
5.2	Polární, válcové a kulové souřadnice	92
5.2.1	Poloha bodu v rovině a prostoru jinak	93
5.2.2	Souřadnicové křivky a plochy	99
5.2.3	Malá odbočka do světa funkcí více proměnných — parciální derivace	102
5.2.4	Elementární plocha a objem	111
5.2.5	Elementární délka	120

5.2.6	Cvičení . . . . .	126
5.3	Obecné souřadnice . . . . .	127
5.3.1	Souřadnicové křivky a plochy . . . . .	128
5.3.2	Elementární plocha a objem . . . . .	131
5.3.3	Elementární délka . . . . .	131
5.3.4	Cvičení . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Linearita v aplikacích aneb lineární algebra do třetice</b>	<b>133</b>
6.1	Skalární součin . . . . .	133
6.1.1	Skalární součin a jeho reprezentace v bázích . . . . .	134
6.1.2	Ortonormální báze . . . . .	140
6.1.3	Ortogonální projekce . . . . .	149
6.1.4	Cvičení . . . . .	159
6.2	„Fyzikální“ lineární operátory a jejich vlastní vektory . . . . .	161
6.2.1	Unitární (ortogonální) operátory . . . . .	161
6.2.2	Samoadjungované (symetrické) lineární operátory . . . . .	174
6.2.3	Cvičení . . . . .	187
6.3	Symetrické operátory v geometrii a ve fyzice . . . . .	188
6.3.1	Kvadratické formy . . . . .	188
6.3.2	Rozpoznávání kvadratických křivek a ploch . . . . .	194
6.3.3	Symetrické operátory, kvadratické formy a fyzika . . . . .	205
6.3.4	Linearita ve fyzikálních a technických aplikacích . . . . .	210
6.3.5	Cvičení . . . . .	215
<b>7</b>	<b>Obyčejné diferenciální rovnice</b>	<b>217</b>
7.1	Diferenciální rovnice v životě . . . . .	222
7.2	Rovnice prvního řádu rozřešené vzhledem k derivaci . . . . .	230
7.2.1	Rovnice se separovatelnými proměnnými a rovnice na ni převoditelné . . . . .	243
7.2.2	Rovnice lineární . . . . .	256
7.2.3	Rovnice Bernoulliova . . . . .	262
7.2.4	Rovnice exaktní . . . . .	262
7.2.5	Cvičení . . . . .	267
7.3	Rovnice prvního řádu nerozřešené vzhledem k derivaci . . . . .	268
7.3.1	Rovnice Lagrangeova a Clairautova . . . . .	268
7.3.2	Obecné použití metody derivování . . . . .	275
7.3.3	Cvičení . . . . .	283
7.4	Lineární diferenciální rovnice druhého řádu . . . . .	283
7.4.1	Základní typy lineárních rovnic druhého řádu . . . . .	284
7.4.2	Princip superpozice . . . . .	288
7.4.3	Wronskián . . . . .	291

7.4.4	Cvičení . . . . .	298
7.5	Lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty . . . . .	298
7.5.1	Homogenní rovnice . . . . .	299
7.5.2	Nehomogenní rovnice . . . . .	306
7.5.3	Harmonické, tlumené a vynucené kmitání . . . . .	310
7.5.4	Cvičení . . . . .	314
7.6	Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů . . . . .	315
7.6.1	Obecné vlastnosti lineárních rovnic $n$ -tého řádu . . . . .	315
7.6.2	Lineární rovnice $n$ -tého řádu s konstantními koeficienty . . . . .	317
7.6.3	Cvičení . . . . .	318
7.7	Soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu . . . . .	319
7.7.1	Obecné vlastnosti . . . . .	320
7.7.2	Soustavy s konstantními koeficienty . . . . .	322
7.7.3	Lze místo soustavy $n$ rovnic prvního řádu řešit jednu rovnici $n$ -tého řádu a naopak? . . . . .	328
7.7.4	Cvičení . . . . .	340
<b>8</b>	<b>Řady funkcí</b>	<b>343</b>
8.1	Posloupnosti a řady podruhé — čísla . . . . .	344
8.1.1	Číselné posloupnosti a jejich konvergence . . . . .	345
8.1.2	Číselné řady — lze sečíst nekonečně mnoho čísel s konečným výsledkem? . . . . .	356
8.1.3	Cvičení . . . . .	382
8.2	Posloupnosti a řady potřetí — funkce . . . . .	385
8.2.1	Posloupnosti funkcí — není konvergence jako konvergence . . . . .	385
8.2.2	Řady funkcí a posloupnosti jejich částečných součtů . . . . .	398
8.2.3	Cvičení . . . . .	403
8.3	Zvlášť užitečné řady funkcí . . . . .	405
8.3.1	Mocninná řada . . . . .	405
8.3.2	Fourierova řada . . . . .	409
8.3.3	Několik opravdu užitečných aplikací . . . . .	414
8.3.4	Cvičení . . . . .	431
<b>9</b>	<b>Závislosti na více parametrech aneb funkce více proměnných</b>	<b>435</b>
9.1	Podmnožiny euklidovských prostorů $\mathbf{R}^n$ . . . . .	436
9.1.1	Okolí bodů, otevřené a uzavřené množiny . . . . .	437
9.1.2	Vnitřky, vnějšky a hranice podmnožin $\mathbf{R}^n$ . . . . .	442
9.1.3	Nevlastní body a jejich okolí . . . . .	447
9.1.4	Oblasti — rozumné definiční obory . . . . .	449
9.1.5	Cvičení . . . . .	453
9.2	Skalární funkce více proměnných . . . . .	455

9.2.1	Funkce, limity, spojitost . . . . .	455
9.2.2	Parciální derivace a řetězové pravidlo . . . . .	475
9.2.3	Úplný, ale i neúplný diferenciál . . . . .	491
9.2.4	Směrová derivace a gradient, vrstevnice a spádnice . . . . .	514
9.2.5	Extrémy a stacionární body všeho druhu . . . . .	525
9.2.6	Jeden „prémiový“ příklad . . . . .	553
9.2.7	Cvičení . . . . .	561
9.3	Vektorové funkce více proměnných . . . . .	566
9.3.1	Derivace vektorové funkce — Jacobiho zobrazení . . . . .	566
9.3.2	Proudnicе, siločáry a jiné integrální čáry vektorových polí . . . . .	571
9.3.3	Křivkový integrál druhého druhu . . . . .	576
9.3.4	Cvičení . . . . .	585
9.4	Diferenciální operátory . . . . .	586
9.4.1	Zřídla a víry — divergence a rotace vektorové funkce . . . . .	587
9.4.2	Operátor nabla a Laplaceův operátor . . . . .	600
9.4.3	Identity pro diferenciální operátory . . . . .	605
9.4.4	Cvičení . . . . .	607
<b>10</b>	<b>Základy variačního počtu pro mechaniku</b>	<b>609</b>
10.1	Princip stacionárního bodu . . . . .	609
10.1.1	Princip nejkratšího času aneb jak se odráží a láme světlo . . . . .	610
10.1.2	Úloha o brachistochroně a další variační úlohy . . . . .	612
10.1.3	Variační princip a variační formule . . . . .	618
10.1.4	Obrácená variační úloha . . . . .	629
10.1.5	Cvičení . . . . .	631
10.2	Variační počet a fyzika . . . . .	633
10.2.1	Fyzikální princip nejmenší akce . . . . .	633
10.2.2	Pohybové rovnice, které Newton neobjevil . . . . .	635
10.2.3	Cvičení . . . . .	643
10.3	Několik aplikací . . . . .	644
10.3.1	... geometrických . . . . .	644
10.3.2	... fyzikálních a technických . . . . .	649
10.3.3	Cvičení . . . . .	654
	<b>Výsledky cvičení</b>	<b>657</b>
	<b>Literatura</b>	<b>683</b>
	<b>Rejstřík</b>	<b>687</b>
	<b>Obsah třetího dílu</b>	<b>693</b>