

# Obsah

Předmluva .....	3
Kapitola 1. ÚVOD	
1. Úvodní poznámky .....	4
Kapitola 2. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S OKRAJOVÝMI PODMÍNKAMI. PROBLÉM VLASTNÍCH ČÍSEL	
a) <b>Technická motivace</b> .....	6
2. Technická motivace .....	6
3. Vztah mezi problémem (2.4), (2.5) a problémem, odpovídajícím nulovému vertikálnímu zatížení .....	9
b) <b>Problém vlastních čísel</b> .....	10
4. Prostor $L_2(a, b)$ .....	10
5. Problém vlastních čísel .....	13
6. Definice 1 (vlastní čísla a vlastní funkce problému (5.1), (5.2)) .....	14
7. Poznámka .....	14
8. Věta o kladnosti vlastních čísel .....	14
9. Věta o ortogonálnosti vlastních funkcí .....	15
10. Určení vlastních čísel a vlastních funkcí problému (5.1), (5.2) .....	16
11. Normované vlastní funkce .....	17
12. Věta (shrnující věta o problému vlastních čísel (5.1), (5.2)) .....	18
13. Problém vlastních čísel na intervalu $\langle a, b \rangle$ .....	18
14. Cvičení .....	18
15. Poznámka .....	19
c) <b>Nehomogenní rovnice s okrajovými podmínkami</b> .....	19
16. Nehomogenní problém .....	19
17. Věta o řešitelnosti problému (16.1), (16.2) .....	19
18. Poznámka .....	20
19. Příklad .....	20
20. Příklad .....	21
21. Poznámka k příkladům 19 a 20 .....	22
22. Zobecnění uvedených výsledků .....	23
23. Poznámka .....	24
d) <b>Přibližné řešení obyčejných diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami metodou sítí. Přibližný výpočet vlastních čísel</b> .....	24
24. Metoda sítí pro obyčejné diferenciální rovnice .....	24
25. Příklad .....	25
26. Konvergence metody sítí .....	26
27. Užití metody sítí v problému vlastních čísel. Příklad .....	27
28. Cvičení .....	28



## Kapitola 3. PARCIÁLNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

<b>a) Základní pojmy. Příklady rovnic vyskytujících se ve stavebně-inženýrských problémech</b> .....	29
29. Základní pojmy .....	29
30. Příklad .....	29
31. Laplaceův operátor .....	29
32. Otázka obecného řešení .....	30
33. Rovnice, vyskytující se nejčastěji ve stavebně-inženýrských problémech .....	30
34. Poznámka o rovnicích eliptického, parabolického a hyperbolického typu .....	31
35. Poznámka o počátečních a okrajových podmínkách .....	31
36. Odvození rovnice pro kmitání struny .....	32
<b>b) Dirichletův problém pro Laplaceovu a Poissonovu rovnici. Věta o maximu pro harmonické funkce a její důsledky</b> .....	34
37. Oblasti s lipschitzovskou hranicí .....	34
38. Poissonova rovnice a okrajové podmínky .....	34
39. Definice Dirichletova problému pro Poissonovu rovnici .....	35
40. Příklad .....	36
41. Příklad .....	36
42. Poznámka o existenci a jednoznačnosti řešení Dirichletova problému pro Poissonovu rovnici .....	36
43. Poznámka o případě, kdy funkce $f$ v (39.1) je nespojitá, a o nespojitých okrajových podmínkách .....	36
44. Definice (harmonické funkce) .....	36
45. Věta o maximu pro harmonické funkce .....	37
46. Poznámky k větě o maximu .....	37
47. Cvičení .....	37
48. Věta o spojitě závislosti řešení Dirichletova problému pro Poissonovu (resp. Laplaceovu) rovnici na okrajových podmínkách .....	37
49. Poznámka .....	38
50. Věta o jednoznačnosti řešení Dirichletova problému pro Poissonovu (resp. Laplaceovu) rovnici .....	39
<b>c) Rovnice vedení tepla</b> .....	39
51. Smíšený problém pro rovnici vedení tepla .....	39
52. Definice řešení problému (51.1) – (51.4) .....	40
53. Příklad .....	40
54. Fyzikální interpretace problému (51.1) – (51.4) .....	41
55. Poznámka .....	42
56. Věta o maximu pro rovnici vedení tepla .....	42
57. Fyzikální význam věty o maximu .....	42
58. Věta o spojitě závislosti řešení problému (51.1) – (51.4) na počátečních a okrajových podmínkách .....	42
59. Poznámka .....	43
60. Věta o jednoznačnosti řešení .....	43
61. Poznámka .....	43



## Kapitola 4. VARIČNÍ METODY ŘEŠENÍ ELIPTICKÝCH PROBLÉMŮ

<b>a) Rovnice <math>Au = f</math>. Symetrické, pozitivní a pozitivně definitní operátory</b> .....	44
62. Rovnice $Au = f$ .....	44
63. Formulace okrajových podmínek pro rovnici $Au = f$ .....	45
64. Přípustné funkce. Definiční obor operátoru $A$ .....	46
65. Příklad .....	47
66. Poznámka k definičnímu oboru $D_A$ operátoru $A$ .....	48
67. Symetrické, pozitivní a pozitivně definitní operátory .....	48
68. Poznámka .....	48
69. Příklad .....	49
70. Poznámka 1 k příkladu 69 .....	50
71. Poznámka 2 k příkladu 69 .....	50
72. Příklad .....	51
73. Tabulka pozitivně definitních problémů .....	53
74. Poznámka k pojmu pozitivnosti .....	54
75. Věta o jednoznačnosti řešení rovnice $Au = f$ s pozitivním operátorem .....	55
<b>b) Věta o minimu funkcionálu energie. Zobecněná řešení</b> .....	55
76. Funkcionál energie .....	55
77. Věta o minimu funkcionálu energie .....	56
78. Příklad (průhyb prutu na pružném podloží) .....	58
79. Poznámka k větě o minimu funkcionálu energie .....	59
80. Energetický prostor $H_A$ . Zobecněné řešení rovnice $Au = f$ .....	59
81. Poznámka .....	61
<b>c) Variační metody</b> .....	61
82. Ritzova metoda .....	61
83. Věta o konvergenci Ritzovy metody .....	64
84. Volba báze pro rovnice druhého řádu .....	64
85. Poznámka k volbě báze .....	65
86. Příklad. Obyčejné diferenciální rovnice .....	65
87. Poznámka .....	66
88. Příklad. Parciální diferenciální rovnice .....	67
89. Cvičení .....	67
90. Galerkinova metoda .....	68
91. Metoda konečných prvků .....	68
92. Poznámka k metodě konečných prvků .....	70
<b>d) Problém vlastních čísel pro rovnice řádu <math>2k</math></b> .....	71
93. Problém vlastních čísel pro rovnice řádu $2k$ .....	71
94. Základní věta .....	72
95. Zobecnění na případ rovnice $Au - \lambda Bu = 0$ .....	72
96. Problém vlastních čísel pro Laplaceův operátor .....	72

## Kapitola 5. METODA SÍTÍ PRO PARCIÁLNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE. METODA ČASOVÉ DISKRETIZACE

97. Metoda sítí pro parciální diferenciální rovnice .....	73
98. Příklad .....	73
99. Liebmannova iterace .....	74
100. Příklad .....	74
101. Poznámka k metodě sítí .....	75
102. Metoda sítí pro rovnici vedení tepla. Explicitní schéma .....	76
103. Příklad .....	77
104. Implicitní schéma .....	78
105. Metoda sítí pro vlnovou rovnici .....	79
106. Metoda časové diskretizace (Rotheho metoda, metoda přímek) .....	79
107. Příklad .....	80
108. Poznámka k metodě časové diskretizace .....	82

## Kapitola 6. FOURIEROVA METODA

109. Fourierova metoda pro rovnici kmitání struny .....	83
110. Poznámka .....	86
111. Cvičení .....	86
112. Další použití Fourierovy metody .....	86
Literatura .....	87
Rejstřík .....	88

