

Obsah

1	Předběžné pojmy, výsledky, značení	1
1.1	Značení	1
1.2	Weierstrassova věta	3
1.3	Výsledky týkající se Lebesgueova integrálu	8
1.4	Fourierova transformace a Fourierovy řady	13
2	Zavedení zobecněných funkcí	17
2.1	Prostor testovacích funkcí	17
2.2	Prostor zobecněných funkcí	22
3	Operace nad zobecněnými funkcemi	32
3.1	Afinní transformace souřadnic	33
3.2	Násobení hladkou funkcí	34
3.3	Derivování zobecněných funkcí	35
3.4	Zobecněné funkce s jednobodovým nosičem	36
3.5	Primitivní funkce k zobecněné funkci	40
3.6	Zobecněné derivace po částech hladkých funkcí	42
4	Řady v prostoru zobecněných funkcí	48
4.1	Některé základní vlastnosti	48
4.2	Trigonometrické řady ve smyslu zobecněných funkcí	50
4.3	Periodické zobecněné funkce	51
5	Tenzorový součin a konvoluce zobecněných funkcí	58
5.1	Tenzorový součin	58
5.2	Konvoluce zobecněných funkcí	64
5.3	Aproximace zobecněných funkcí hladkými funkcemi	75
6	Temperované zobecněné funkce	78
6.1	Definice a základní vlastnosti	78
6.2	Tenzorový součin temperovaných zobecněných funkcí	85
6.3	Konvoluce temperovaných zobecněných funkcí	88

7	Fourierova transformace zobecněných funkcí	91
7.1	Fourierova transformace na prostoru \mathcal{S}	91
7.2	Zobecněná Fourierova transformace	97
7.3	Inverzní Fourierova transformace	101
7.4	Fourierova transformace finitních zobecněných funkcí	103
8	Laplaceova transformace zobecněných funkcí	108
8.1	Definice a základní vlastnosti	108
8.2	Počtetní pravidla pro Laplaceovu transformaci	111
8.3	Inverzní zobrazení k Laplaceově transformaci	117
9	Řešení klasických parciálních diferenciálních rovnic	120
9.1	Obyčejné diferenciální rovnice	120
9.2	Laplaceův operátor	124
9.3	Rovnice vedení tepla	128
9.4	Vlnová rovnice	133
	Literatura	142

Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ pokládáme

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \binom{\alpha_2}{\beta_2} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$$

$$|\alpha| = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)^{1/2}$$

$$x^\alpha = \sum_{j=1}^n x_j \delta_j$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

Případ nebude třeba explicitně vyvažovat souřadnice, budeme psát krátce ∂^α místo $\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$.
 Pro symboly ∂_1 a ∂_2 zde dochází k určité kolizi ve značení, správný význam by měl být vždy zřejmý z kontextu.

Formaci tohoto formalizmu můžeme zapsat Taylorovu řadu v bodě x_0 příslušnou hladkou funkci $f(x)$ definovanou na \mathbb{R}^n takto:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$