

# OBSAH.

## ČÁST PRVÁ.

### INTEGRÁLY NEURČITÉ (FUNKCE PRIMITIVNÍ).

#### I. ÚVOD.

##### *1. Základní definice a pojmenování.*

Odstavec	Strana
1. Definice integrálu neurčitého (primitivní funkce) . . . . .	1
2. O úkolu integrálního počtu . . . . .	3
3.—4. Některé jednoduché formule vyplývající bezprostředně ze vzorců diferenciálního počtu . . . . .	3

##### *2. Různé metody pro výpočet neurčitých integrálů.*

5. Metoda rozkladu ve sčítance . . . . .	4
6. Integrál z potenční řady . . . . .	5
7. Metoda částečné (parciální) integrace . . . . .	6
8. Metoda substituce . . . . .	7
9. Metoda derivace podle parametru . . . . .	12
10. Cvičení . . . . .	14

#### II. INTEGRÁLY Z RACIONÁLNÝCH FUNKCÍ.

##### *Definice elementárních funkcí pro komplexní hodnoty argumentu.*

11. Rozklad racionální funkce ve zlomky částečné . . . . .	16
12.—13. Obecný výpočet při rozkladu se vyskytujícími konstant . . . . .	18
14. Praktický jejich výpočet . . . . .	19
15. O důsledku pro rozklad racionální funkce za předpokladu, že koefi- cientsy racionální funkce jsou reálné . . . . .	21
16. Integrace racionální funkce . . . . .	22
17. O výpočtu racionální části integrálu z racionální funkce . . . . .	24
18. Několik obecnějších příkladů pro integraci racionálních funkcí . . . . .	27
18a. Zavedení komplexních čísel za koeficienty racionálních funkcí . . . . .	29
Definice obecné komplexní funkce, jejího diferenciálu a integrálu . . . . .	31
18b. Definice logaritmu pro komplexní hodnoty argumentu . . . . .	32
18c. Definice funkce exponenciální a funkcí goniometrických pro kom- plexní hodnotu argumentu . . . . .	38
Cvičení . . . . .	39

18d. Funkce cyklotrické pro komplexní argumenty . . . . .	41
Cvičení . . . . .	45
18e. Obecná exponenciální funkce a mocnina v oboru komplexních čísel . . . . .	44
18f. Elementární funkce transcendentní. Jejich derivace . . . . .	46
18h. Nekonečné řady, jejichž členové jsou čísla komplexní . . . . .	49
18k. Řady potenční komplexní proměnné . . . . .	49
18l. Rozvoj elementárních funkcí komplexní proměnné z řady mocninné . . . . .	50
18m. Neurčitý integrál z funkce komplexní proměnné . . . . .	51
Cvičení . . . . .	52

### III. INTEGRÁLY Z FUNKCÍ IRACIONÁLNÍCH.

#### 1. Některé případy jednoduché.

19. Integrály tvaru $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p'}{q'}} \dots\right] dx$ . . . . .	58
20. Integrály binomické . . . . .	61
21. Redukční vzorce pro integrály binomické . . . . .	62
Cvičení . . . . .	64

#### 2. Integrály $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ .

22. První metoda pro jejich výpočet . . . . .	66
23. Druhá metoda . . . . .	70
24. Integrál $\int \frac{dx}{(x-i)\sqrt{Ax^2+C}}$ . . . . .	72
25. Integrál $\int \frac{(Hx+K) dx}{(b_0x^2+2b_1x+b_2)\sqrt{a_0x^2+2a_1x+a_2}}$ . . . . .	73
26. Přehled výsledků . . . . .	76
Cvičení . . . . .	77

#### 3. O křivkách racionálních a integrálech jim příslušných.

27. Pojem křivky racionální vyložen na křivce o rovnici $y^2=ax^2+bx+c$ . . . . .	79
28. Jiné příklady racionálních křivek . . . . .	80
29. O maximálním počtu dvojných bodů při ireducibilní křivce algebraické . . . . .	81
30. Křivka alg. ireducibilní mající maximální počet bodů dvojných jest křivkou racionální . . . . .	82
31. Některé vyšší singularity . . . . .	85
32. Příklad . . . . .	85
33. Definice rodu algebraické křivky . . . . .	84
34. Abelovy integrály rodu $p$ . Integrály Abelovy rodu nula lze vyjádřiti integrály z funkcí racionálních . . . . .	85

#### 4. Redukce integrálů hypereliptických (a eliptických).

35. Integrály $\int \frac{x^r dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{dx}{(x-\alpha)^r \sqrt{X}}$ , kde $X$ jest polynom $n$ -tého stupně v $x$ . . . . .	86
35a. Integrály $\int \frac{A dx}{B^n \sqrt{X}}$ , kde $A, B, X$ jsou mnohočleny v $x$ . . . . .	88



245. Nutná a postačující podmínka, aby oblouk spojitě křivky byl rektifikace schopný . . . . .	515
--	-----

*2. O počítání plochy rovinné omezené křivkou čarou.*

246. Velikost plochy vypočtená na základě definice integrální Cauchy-Riemannovy . . . . .	517
247.—248. Jiné výrazy pro velikost plošnou . . . . .	518
249. Význam příslušných křivkových integrálů při křivkách uzavřených se protínajících . . . . .	521
250. Příklady pro počítání velikosti plošné (1.—5.) . . . . .	522
251. Příklad 6. Věta Holditchova . . . . .	525
252. Příklad 7. Plochy omezené paralelními křivkami. Délky oblouků těchto křivek . . . . .	527
253.—257. Vyšetřování křivek uzavřených, jimž přísluší velikost plošná . . . . .	529
258. Křivky kvadratury schopné v užším smyslu . . . . .	534
259.—261. Obsah množství bodového vícerozměrného (podle Jordana) . . . . .	536

## ČÁST ČTVRTÁ.

### INTEGRÁLY MNOŽNÉ (INTEGRÁLY Z FUNKCÍ O NĚKOLIKA PROMĚNNÝCH).

#### XII. INTEGRÁLY DVOJNÉ (INTEGRÁLY Z FUNKCÍ O DVOU PROMĚNNÝCH).

*1. Definice a základní vlastnosti.*

262. Obory dvojrozměrné . . . . .	541
263.—267. Horní a dolní součty. Jejich dolní a horní hranice. Základní věty . . . . .	542
268. Definice integrálu dvojného . . . . .	547
269.—270. O funkcích integrace schopných . . . . .	549
271. Věta o střední hodnotě . . . . .	551
272. O výpočtu integrálů dvojných pomocí dvojnásobné integrace (integrálů dvojnásobných) . . . . .	552
273.—274. Rozšíření platnosti získaných vztahů . . . . .	554
275.—277. O výpočtu trojných integrálů . . . . .	556

*2. Zavádění nových proměnných integračních do množných integrálů.*

278. Prvý způsob odvození (u integrálů dvojných) . . . . .	564
279.—280. Druhý způsob odvození . . . . .	570
281. Polární souřadnice . . . . .	574
282. Integrál Laplaceův . . . . .	576
283. Zevšeobecnění substituce polárních souřadnic . . . . .	577
284. Transformace inverzní . . . . .	578



Odstavec	Strana
285. Souřadnice eliptické . . . . .	578
286. Souřadnice ortogonální . . . . .	579
287. Polární souřadnice v oborech trojrozměrných . . . . .	580
288. Souřadnice eliptické v oborech trojrozměrných . . . . .	580
289. Obsah rovnoběžnostěnu v oboru $n$ -rozměrném . . . . .	581
290. Obsah $(n+1)$ -stěnu v oboru $n$ -rozměrném . . . . .	582
290a. Obsah $(n+1)$ -stěnu v oboru $n$ -rozměrném, jsou-li dány rovnice jednotlivých stěn . . . . .	585

### 5. Geometrická použití dvojných integrálů.

291. Krychlový obsah tělesa . . . . .	584
292.—294. Jiné formule pro krychlový obsah . . . . .	585
295. Příklady . . . . .	586
296. Krychlový obsah tělesa omezeného plochou rotační a dvěma rovinami kolmými k ose rotační . . . . .	588
297. Povrch křivé plochy . . . . .	589
298. Další vzorce pro povrch křivé plochy . . . . .	591
299. Povrch rotační plochy. Vivianův problém . . . . .	595
300. Povrch sférického trojúhelníka . . . . .	594
301. Povrch elipsoidu . . . . .	595
302.—304. Odvození vzorce pro velikost povrchu plochy na základě jiné definice . . . . .	597

## XIII. RŮZNÁ ROZŠÍŘENÍ POJMU VÍCEROZMĚRNÉHO INTEGRÁLU (INTEGRÁLY NEVLASTNÍ, PLOŠNÉ).

### 1. Integrály dvojně nevlastní.

305.—309. Funkce jest nekonečná toliko v okolí jediného bodu . . . . .	605
310. Funkce jest nekonečná toliko v bodech čáry o rovnici $y = \varphi(x)$ . . . . .	614
311. Příklady . . . . .	615
312.—315. Obor integrační jest nekonečný . . . . .	622
314. Příklady . . . . .	625

### 2. Integrály plošné.

315.—318. Definice . . . . .	628
319.—320. Vyjádření integrálů plošných, je-li rovnice plochy dána parametricky . . . . .	632
321. Jiné vyjádření integrálů plošných . . . . .	635
322. O podmínce nutné, aby integrál plošný podle libovolné uzavřené plochy byl roven nule . . . . .	636
323. Podmínka postačující . . . . .	637
324. Věta o střední hodnotě u plošných integrálů . . . . .	639
325. Příklady . . . . .	640
326. O řešení soustavy rovnic dif. $\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = F, \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} = G, \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = H$ . . . . .	642
327. Formule Stokesova . . . . .	644



Odstavec	Strana
328. O zavádění nových proměnných do plošných integrálů . . . . .	.645
329. Použití. Ustanovení znaménka dosud neznámého . . . . .	.648
330. Odvození vět předch. odstavců pomocí vět o integrálech trojných . . . . .	.650
331. Rovnice Greenovy . . . . .	.651

## DODATEK.

ÚVOD DO TEORIE MNOŽSTVÍ. NAPSAL VOJTĚCH JARNÍK. . . . .	.655
--	------

### ODDÍL 1.

#### *Základní pojmy. Ekvivalence.*

1. Úvod . . . . .	.657
2. Základní úkony . . . . .	.659
3. Ekvivalence . . . . .	.662
4. Spočetná množství . . . . .	.665
5. Množství mocnosti kontinua . . . . .	.666
6. Množství nespočetná . . . . .	.669

### ODDÍL 2.

#### *Množství uspořádaná a dobře uspořádaná.*

1. Množství uspořádaná . . . . .	.671
2. Podobnost množství uspořádaných . . . . .	.675
3. Množství dobře uspořádaná . . . . .	.675
4. Základní věta o množstvích dobře uspořádaných . . . . .	.676

### ODDÍL 3.

#### *Pořadová čísla.*

1. Úvodní poznámky . . . . .	.680
2. Pořadová čísla první a druhé třídy číselné . . . . .	.681
3. Uspořádání pořadových čísel . . . . .	.685
4. Struktura množství $\aleph_1 + \aleph_2$ . . . . .	.685
5. Transfinitní indukce . . . . .	.688
6. Závěrečné poznámky . . . . .	.690

### ODDÍL 4.

#### *Množství bodová.*

1. Cartézské prostory . . . . .	.692
2. Množství číselná . . . . .	.695
3. Základní pojmy pro množství v $R_k$ . . . . .	.695
4. Uzavřená množství . . . . .	.699

Odstavec	Strana
5. Otevřená množství . . . . .	.702
6. Derivované množství . . . . .	.705
7. Množství v sobě hustá . . . . .	.704
8. Množství dokonalá . . . . .	.705
9. Kondenzační body . . . . .	.706
10. Množství uzavřená a otevřená v $R_1$ . . . . .	.708
11. Vyšší derivace bodového množství . . . . .	.712
12. Nový důkaz věty Cantor-Bendixonovy. Množství reducibilní . . . . .	.716

### ODDÍL 5.

#### *Dodatky k integrálnímu počtu.*

1. Poznámky k odst. 64 . . . . .	.720
2. Poznámka k odst. 66 . . . . .	.723
3. Poznámka k cvičení 24 na str. 527 . . . . .	.723

---

Literatura k teorii množství . . . . .	.725
--	------

---



56. Redukce integrálů hypereliptických a eliptických na základní tvary integrálů prvního, druhého a třetího druhu . . . . . 89

5. Integrály eliptické.

57. Integrály eliptické lze reálnými substitucemi převést na integrály eliptické, kde polynom pod odmocninou jest třetího stupně s reálnými kořeny . . . . . 91

58. Integrály pseudoeliptické. Příklady . . . . . 94

59. Normální tvar Weierstrassův . . . . . 96

40. Normální tvar Legendreův. Tabulka usnadňující převod na normální tvar Legendreův . . . . . 98

41. Normální tvar Riemannův . . . . . 105

41a. Lineární transformace el. integrálů . . . . . 104

41b. Pokračování; příklady . . . . . 107

41c. Kvadratické transformace el. integr. . . . . 111

41d. Landenova transformace . . . . . 115

Cvičení . . . . . 114

6. Abelovy integrály rodu 1.

42. Převod křivek rodu 1 na křivku stupně třetího biraciální transformací 116

43. Vyjádření integrálů Abelových rodu 1 integrály eliptickými . . . . 118

43a. Biracionální transformace křivky  $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$  samu v sebe . 119

43b. Biracionální transformace křivky  $y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$  samu v sebe . 122

44. Příklad (Integrál Abelův patřící ke křivce  $y^3 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ) . . 123

45. Poznámka. Integrály Abelovy rodu vyššího než 1 lze v případech zvláštních převést na eliptické integrály . . . . . 124

Cvičení . . . . . 125

IV. INTEGRÁLY Z NĚKTERÝCH FUNKCÍ TRANSCEDENTNÍCH.

46. Integrály z funkcí tvaru  $R(\cos x, \sin x)$  . . . . . 127

47. Zvláštní případy . . . . . 127

48. Integrály tvaru  $\int R(e^{ax}) dx$  . . . . . 128

49. Zjednodušení vznikající zavedením komplexních čísel . . . . . 128

50. Příklady . . . . . 129

51. Integrály z polynomu  $P(x, e^{ax}, e^{bx}, \dots, \sin ax, \dots)$  . . . . . 135

52. Integrály  $\int R(x) \log x dx$ . Funkce  $-\int \frac{\log(1-x)}{x} dx$  . . . . . 134

53. Logaritmus integrál a funkce příbuzné . . . . . 135

V. PŘECHOD OD INTEGRÁLŮ NEURČITÝCH K URČITÝM.

1. Obecné výpody.

54. Definice . . . . . 137

55. Geometrický význam určitého integrálu . . . . . 138

56. Derivace integrálu určitého podle mezí . . . . . 141

57. Další základní věty o integrálu určitém . . . . . 142

58.—59. Věta o střední hodnotě určitého integrálu . . . . . 143

60. Vyjádření určitého integrálu z funkce spojitě limitou jistého součtu 145

61. Rozšíření pojmu určitého integrálu. Příklady . . . . . 146





85. Kompletní integrály eliptické v normálním tvaru Weierstrassově . . .	208
84. Rozvoje pro integrály eliptické v normálním tvaru Weierstrassově . . .	211

## ČÁST DRUHÁ.

### INTEGRÁL URČITÝ NA ZÁKLADĚ DEFINICE SOUČTOVÉ (CAUCHY-RIEMANNOVY).

#### VI. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI URČITÉHO INTEGRÁLU.

##### 1. Definice integrálu omezeného ( $b < a$ ).

85. Součty $S$ a $s$ a čísla $\Sigma$ , $\sigma$ jimi stanovená . . . . .	213
86. Čísla $\Sigma$ a $\sigma$ jakožto limity součtů $S$ a $s$ . . . . .	215
87. Definice určitého integrálu z funkce $f(x)$ v intervalu $(a, b)$ . . . . .	216
Příklady . . . . .	219

##### 2. O funkcích integrace schopných (podle C.-R. v $(a, b)$ ).

88. Některé obecné skupiny funkcí integrace schopných . . . . .	221
89. Součet, součin, podíl, absolutní hodnota funkcí integrace schopných jsou integrace schopny . . . . .	222
90. Délka množství číselného . . . . .	224
91. Oscilace funkce v bodě $c$ . . . . .	226
92.—93. Nutná a postačující podmínka, aby funkce byla v $(a, b)$ podle C.—R. integrace schopna . . . . .	226
94. Rozšíření pojmu určitého integrálu . . . . .	227

##### 3. Základní vlastnosti omezeného integrálu.

95.—96. . . . .	228
97. Věta o střední hodnotě . . . . .	229
98. Integrál jest spojitou funkcí horní i dolní meze . . . . .	232
99.—100. Souvislost integrálu na základě definice Cauchy-Riemannovy s primitivní funkcí . . . . .	233
101. Poznámka . . . . .	235
102. Integrace částečná . . . . .	236
103. Rozšíření věty o integraci částečné . . . . .	237
104. Druhá věta o střední hodnotě (důkaz její ve speciálním případě) . . . . .	238
105. Pomocná věta Abelova . . . . .	239
106. Důkaz věty druhé o střední hodnotě pomocí Abelovy věty . . . . .	240
107. O zavedení nové proměnné do určitého integrálu . . . . .	242
Cvičení . . . . .	244

##### 4. Některá použití věty o střední hodnotě a rovnice pro částečnou integraci.

108. Odvození rovnice Taylorovy . . . . .	250
109.—110. O vzorci Euler-Maclaurinově . . . . .	251
111. Výpočet integrálů pomocí formule Euler-Maclaurinovy . . . . .	255



Odstavec	Strana
112. Použití formule Euler-Maclaurinovy jako sumační . . . . .	257
Odvození Stirlingovy formule pro $n!$ . . . . .	258
Výpočet Eulerovy konstanty . . . . .	259
113. Jiné odvození formule Euler-Maclaurinovy . . . . .	259
114. Použití metody odst. předch. na počítání součtů jiného druhu . . . . .	261
Výpočet $\log 2$ . . . . .	262
Výpočet čísla $\pi$ . . . . .	264
115.—116. Polynomy Legendreovy . . . . .	264
117. Další věty o polynomech Legendreových . . . . .	266
118. Důkaz, že číslo $e$ jest transcendentním . . . . .	269
Cvičení . . . . .	271
Některé další věty o funkcích a číslech Bernoulliských a jim pří- buzných . . . . .	272
Další věty o polynomech Legendreových . . . . .	275
<i>5. O numerickém počítání určitých integrálů (mechanické kvadratury).</i>	
119. Výklad pojmu mechanické kvadratury . . . . .	277
120. Metoda lichoběžníková . . . . .	278
121. Formule Simpsonova . . . . .	280
122. Interpolace parabolická (Lagrangeův mnohočlen) . . . . .	281
123. Metoda Cotesova . . . . .	283
124. Druhá metoda založená na interpolaci parabolické . . . . .	285
125. Zavedení součtových čísel. Symbol $(a, s)$ . . . . .	288
126. Dva hlavní případy při interpolaci ekvidistantní a příslušné mech. kvadratury . . . . .	290
127. Formule Simpsonova se zbytkem . . . . .	294
128. Interpolace parabolická pro případ, že jsou dány hodnoty funkční a zároveň hodnoty prvních derivací v $r$ bodech . . . . .	297
129. Mechanická kvadratura v případě předch. odstavce . . . . .	298
130. Metoda Gaussova pro mechanickou kvadraturu . . . . .	299
<i>6. O funkcích s variací konečnou.</i>	
131. Definice . . . . .	301
132. Vyjádření pomocí funkcí neklesajících . . . . .	302
133. Funkce spojitě a zároveň s variací konečnou . . . . .	303
134. Integrál určitý jest funkce s variací konečnou své horní meze . . . . .	304
135. Diskontinuity funkcí s variací konečnou . . . . .	305
136. Další vyšetřování funkcí spojitých a s variací konečnou . . . . .	306
<i>7. Elementární teorie řad Fourierových.</i>	
136a. Pojem řady trigonometrické a Fourierovy . . . . .	307
136b. Řada Fourierova pro funkci $\frac{1}{2}(\pi - x)$ . . . . .	311
136c. Důsledky z odst. předch. . . . .	314
136d, e, f. Řady Fourierovy pro funkce, jež vznikají integrací z funkcí integrace schopných . . . . .	315
Cvičení . . . . .	320
Věty o součtech řad Fourierových seřádaných podle Riemanna . . . . .	323
Integrál Fresnelův . . . . .	329
Gaussovy součty . . . . .	329



Odstavec	Strana
156g. O aproxiomaci funkcí spojitých pomocí polynomů trigonometrických	350
156h. Věta Weierstrassova o polynomech . . . . .	351
156i. Rozšíření výsledků odst. předch. na funkce nespojité . . . . .	353
156j. Střední chyba (odchylka) . . . . .	354
156k, l. Mnohočleny mající nejmenší střední odchylku. Rozvoj podle Legendreových polynomů . . . . .	355
156m. O přibližném vyjádření eliptických integrálů pomocí polynomů v modulu . . . . .	357
156n. Mnohočleny trigonometrické mající nejmenší střední odchylku od dané funkce. Parsevalův teorem . . . . .	359

## VII. ROZŠÍŘENÍ POJMU URČITÉHO INTEGRÁLU (INTEGRÁLY NEVLASTNÍ).

1. *Funkce integrovaná jest v intervalu integračním nekonečnou, po případě neurčitou.*

137.—138. Obecné poznámky. Funkce stává se neurčitou v jistém množství bodovém na intervalu integr. . . . .	344
139. Definice integrálu nevlastního v případě, že funkce stává se nekonečnou pro horní mez . . . . .	346
140. Konvergence absolutní. Některé podmínky pro absolutní konvergenci	347
141. Příklady . . . . .	351
142.—143. Funkce stává se nekonečnou, resp. neurčitou pro konečný po př. i nekonečný počet hodnot intervalu integračního . . . . .	352

2. *Rozšíření pojmu integrálního pro nekonečný interval.*

144. Definice. Absolutní konvergence . . . . .	355
145. Různá kritéria absolutní konvergence . . . . .	357
146. Příklady . . . . .	358
147. Význam symbolů $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ , $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ . . . . .	359
148. Význam pojmenování „integrál nevlastní“ . . . . .	359

5. *Základní vlastnosti integrálů nevlastních.*

149. . . . .	360
--------------	-----

4. *Zavádění nových proměnných se zřetelem k integrálům nevlastním.*

150. Obecný výklad . . . . .	365
151. Příklady . . . . .	365
152. Integrál Laplaceův . . . . .	368

## VIII. INTEGRÁLY Z FUNKCÍ ZÁVISLÝCH NA PARAMETRU.

1. *Vyšetřování, zda funkce těmito integrály definované jsou spojitě funkce parametru.*

155.—154. Postačující podmínky, aby integrál byl spojitou funkcí parametru v jistém bodě. Příklady . . . . .	370
--	-----

155. Postačující podmínky, aby integrál byl spojitou funkcí parametru v jistém intervalu . . . . .	375
156.—158. Rozšíření těchto výsledků zejména v případě, že funkce integrovaná stává se nekonečnou . . . . .	376
159. Kriterium pro stejnoměrnou konvergenci integrálů k nule . . . . .	381
160. Rozšíření pro nekonečný interval integrační . . . . .	383

### 2. Derivace integrálů podle parametru.

161.—162. Postačující podmínky pro existenci derivace . . . . .	384
163. Derivace integrálu podle parametru, závisí-li též meze integrálu na parametru . . . . .	388

### 3. Užití vět o spojitosti a derivaci integrálů závislých na parametru k výpočtu integrálů.

164. Integrál $\int_0^{\pi} \log(1 + 2r \cos x + r^2) dx$ . . . . .	389
165. Integrál $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ . . . . .	390
166. Integrál $\int_0^{\infty} \frac{x^{b-1} dx}{(a+x)^{k+1}}$ . . . . .	391
167. Integrál $\int_0^{\infty} e^{-Ax^2} \cos bx dx$ . . . . .	392
168. Integrál $\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$ . . . . .	393
169. Integrál $\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx$ . . . . .	394
170. Integrály $\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{a^2 + x^2} dx$ , $\int_0^{\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2} dx$ . . . . .	397
171. Integrály $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx^2 dx$ , $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \sin bx^2 dx$ . . . . .	399
172. Integrály $\int_0^{\infty} \sin\left(x^2 \pm \frac{\beta^2}{x^2}\right) dx$ , $\int_0^{\infty} \cos\left(x^2 \pm \frac{\beta^2}{x^2}\right) dx$ . . . . .	401

### 4. O integraci integrálů podle parametru. Integrály dvojnásobné.

173. Definice dvojnásobného integrálu . . . . .	404
174. Stejneměrná konvergence součtových výrazů k hodnotě integrálu . . . . .	405
175. O záměnnosti pořadu integračního . . . . .	406
176. Příklady funkcí, při nichž součet (A) stejnoměrně konverguje . . . . .	403
177.—180. Rozšíření pojmu dvojnásobného integrálu . . . . .	409



Odstavec	Strana
181. Integrály dvojnásobné nevlastní . . . . .	415
182. Gaussův důkaz fundamentální věty algebry . . . . .	418
185.—184. O záměnnosti pořadí integračního, jestliže jeden nebo oba inter- valy integrační stávají se nekonečnými . . . . .	418

5. Příklady pro výpočet omezených integrálů záměnou pořadu integračního.

185. Integrál $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} (\cos b_1 x - \cos b_2 x)}{x^2} dx$ . . . . .	425
186. Integrál Laplaceův . . . . .	426
187. Integrály Fresnelovy . . . . .	427
188. Integrál $\int_0^{\infty} \frac{\cos y}{a^2 + y^2} dy$ . . . . .	429

6. Rozšíření vět o integrálech z funkcí závislých na parametru.

189. Věta Borelova . . . . .	431
190.—191. Zevšeobecněná věta Borelova . . . . .	432
192. Rozšíření na množství vícerozměrná . . . . .	434
193. Věta o zevnější délce množství bodového (Jarníkova) . . . . .	435
194. Věta Arzelàova . . . . .	437
195. Věta o integraci nekonečných řad a jiné aplikace věty Arzelàovy . . . . .	439
196. Totální diferenciál určitého integrálu závislého na dvou parametrech . . . . .	442

X. KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY A ÚPLNÉ DIFERENCIÁLY.

197.—202. Definice a základní věty . . . . .	444
203. Integrály podle uzavřených křivek . . . . .	450
204. Integrály podle hranice oboru $\Omega$ . . . . .	452
205. Rovnice Greenova pro dvě proměnné . . . . .	454
206. Cauchyova integrální věta. Úplné diferenciály . . . . .	455
207. Výpočet integrálu úplného diferenciálu . . . . .	459
208. Integrály z úplného diferenciálu podél obecnějších křivek integračních . . . . .	462
209. Křivkové integrály při třech a více proměnných . . . . .	463
210. Úplné diferenciály při třech proměnných . . . . .	465

## ČÁST TŘETÍ.

### NĚKTERÁ UŽITÍ URČITÝCH INTEGRÁLŮ.

#### X. UŽITÍ POJMU INTEGRÁLNÍHO K DEFINICI A VYŠETŘOVÁNÍ NĚKTERÝCH FUNKCÍ, ZVLÁŠTĚ PAK GAMMAFUNKCE.

##### 1. Eulerovy integrály.

211. Definice gammafunkce. Integrál Eulerův 1. druhu . . . . .	469
212. První základní vlastnost gammafunkce. Výpočet gammafunkce při celistvém argumentu jakož i výpočet $B(p, q)$ , je-li jedno z čísel $p, q$ celé . . . . .	470

Odstavec	Strana
213. Základní vlastnosti funkce $B(p, q)$ . . . . .	471
214. Vyjádření gammafunkce limitním výrazem . . . . .	472
215. Vyjádření gammafunkce nekonečným součinem . . . . .	474
216. Vyjádření funkce $B(p, q)$ pomocí gammafunkcí . . . . .	475
217. Odvození předcházejícího výsledku pomocí vět počtu integrálního . . . . .	476
218. Rozšíření definice funkce gamma i pro záporné argumenty . . . . .	478
219. Relace Gaussova . . . . .	479
220. Rozvoje pro numerický výpočet $\log \Gamma(u)$ . . . . .	480
221. Řada Stirlingova . . . . .	482
222. Vyjádření funkce $\log \Gamma(u)$ určitým integrálem . . . . .	484
223. Rozklad výrazu integrálního pro $\log \Gamma(v)$ . . . . .	486
224. Integrální výraz pro Eulerovu konstantu . . . . .	488
225. Binetova funkce a její derivace . . . . .	488
226. Asymptotické řady pro derivace Binetovy funkce . . . . .	489

### 2. Některá užití gammafunkce.

227. Výpočet některých integrálů pomocí gammafunkce . . . . .	491
228. Integrál $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x dx$ . . . . .	492
229. Integrál $\int_0^1 \frac{x^{a-1} (1-x)^{\beta-1}}{(a+bx)^{a+\beta}} dx$ . . . . .	493
230. Integrály $\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{x^m} dx, \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x^n} dx$ . . . . .	495
231. Výpočet řady hypergeometrické pro $x=1$ . . . . .	494
232. Integrál $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos av \cos^{\beta} v dv$ . . . . .	495

### 5. Logarithmus integrál a jiné funkce definované určitými integrály.

233. Definice $\text{li}(e^{-x})$ pro $x > 0$ . . . . .	497
234. Rozvoj funkce $\text{li}(e^{-x})$ pro $x > 0$ . . . . .	498
235. Definice $\text{li}(e^x)$ pro $x \geq 0$ . . . . .	499
236. Jiná integrální vyjádření funkcí $\text{li}(e^{-x}), \text{li}(e^x)$ . . . . .	500
237. Asymptotický rozvoj pro $\text{li}(e^{-x})$ při $x > 0$ . . . . .	502
238. Asymptotický rozvoj pro $\text{li}(e^x)$ při $x > 0$ . . . . .	503
239. O užití integrállogaritmu v teorii čísel . . . . .	505
240. Zobecnění integrállogaritmu . . . . .	506

## XI. UŽITÍ V GEOMETRII.

### 1. Délka křivých čar.

241. Definice . . . . .	507
242. Vyjádření analytické za jistých předpokladů o rovnici křivky . . . . .	507
243. Formule speciální . . . . .	510
244. Příklady 1.—7. Věta Gravesova . . . . .	510