OBSAH

Předmluva ... 11

I. ÚVOD

1. Předmět a obsah matematické analýzy ... 13
   1.1. Příklady užití matematické analýzy ... 13
   1.2. Stručně o vzniku a vývoji matematické analýzy ... 14
   1.3. Matematická analýza v současné době ... 15
2. Přehled užívaných základních pojmů ... 16
   2.1. Množiny ... 16
   2.2. Výroky ... 18
   2.3. Výrokové formy ... 20
   2.4. Kvantifikátory ... 21
   2.5. Relace ... 21
   2.6. Zobrazení ... 22
   2.7. Mohutnost množin ... 24
   Cvičení ... 25
3. Matematická teorie, její výstavba a studium ... 27
   3.1. Deduktivní metoda ... 27
   3.2. Základní prvky matematické teorie ... 28
   Cvičení ... 31

II. REÁLNÁ A KOMPLEXNÍ ČÍSLA

1. Operace a uspořádání v oboru reálných čísel ... 32
   1.1. Úvodní poznámky ... 32
   1.2. Algebraické operace v **R** ... 33
   1.3. Zkrácené psaní součtů a součinů ... 36
   1.4. Uspořádání v oboru reálných čísel ... 38
   1.5. Intervaly, absolutní hodnota ... 40
   Cvičení ... 43
2. Věta o supremu a infimu a její důsledky ... 44
   2.1. Souvislost v oboru reálných čísel ... 44
   2.2. Věta o supremu a infimu ... 46
   2.3. Princip vložených intervalů ... 48
   2.4. Mocniny a odmocniny ... 48
   Cvičení ... 51

3. Topologie číselné osy. Rozšířená reálná osa 52
3.1. Okolí bodu 52
3.2. Vztah bodu a množiny v **R** 54
3.3. Relativní okolí. Pravé a levé okolí bodu 55
3.4. Rozšířená reálná osa 56
Cvičení 58

4. Posloupnosti reálných čísel 58
4.1. Pojem reálné posloupnosti 58
4.2. Některé vlastnosti posloupností. Operace s posloupnostmi 59
4.3. Limita posloupnosti 60
4.4. Základní vlastnosti limit posloupností 62
4.5. Operace s posloupnostmi a limitami. Nerovnosti a limity 63
4.6. Limita monotónní posloupnosti. Číslo e 67
4.7. Aproximace reálných čísel desetinnými racionálními čísly. Nespočetnost množiny **R** 71
Cvičení 74

5. Obor komplexních čísel 74
5.1. Operace s komplexními čísly 74
5.2. Geometrický model množiny komplexních čísel 75
5.3. Absolutní hodnota a argument komplexního čísla 76
*5.4. Posloupnosti komplexních čísel 79
Cvičení 80

III. LIMITA A SPOJITOST FUNKCE

1. Reálné funkce 82
1.1. Pojem funkce 82
1.2. Graf funkce. Různé způsoby zadání funkce 83
1.3. Některé zvláštní vlastnosti funkcí 87
1.4. Operace s funkcemi. Uspořádání 90
1.5. Elementární funkce 95
1.6. Zobrazení v jiných strukturách 113
Cvičení 115

2. Limita funkce 117
2.1. Úvod 117
2.2. Definice limity a základní vlastnosti 120
2.3. Jednostranné limity 125
2.4. Věty o limitách, výpočet limit 127
Cvičení 140

3. Spojitost funkce 141
3.1. Definice a základní vlastnosti 141
3.2. Jednostranná spojitost. Body nespojitosti 144
3.3. Vlastnosti spojitých funkcí na intervalu 147
Cvičení 156

IV. DERIVACE FUNKCE

1. Definice a základní vlastnosti 157
1.1. Úlohy vedoucí k pojmu derivace 157

1.2. Definice derivace 158
1.3. Tečna a normála grafu funkce 160
1.4. Derivace funkce na množině 161
1.5. Jednostranné derivace funkce v bodě 161
Cvičení 163

2. Výpočet derivace funkce 164

2.1. Pravidla pro počítání s derivacemi 164
2.2. Derivace inverzní funkce 166
2.3. Derivace složené funkce 167

3. Derivování elementárních funkcí 169

3.1. Derivace základních elementárních funkcí 169
3.2. Příklady na výpočet derivace 173
3.3. Tabulka vzorců pro derivace základních elementárních funkcí 175
Cvičení 176

4. Diferenciál funkce 177

4.1. Pojem diferenciálu 177
4.2. Diferencovatelnost funkce 178
4.3. Užití diferenciálu k přibližným výpočtům 180
Cvičení 181

5. Derivace a diferenciály vyšších řádů 182

5.1. Pojem derivace vyššího řádu 182
5.2. Pojem diferenciálu vyššího řádu 184
Cvičení 185

6. Základní věty diferenciálního počtu 186

6.1. Věta o největší (nejmenší) hodnotě funkce 186
6.2. Věty o střední hodnotě 186
6.3. Některé důsledky Lagrangeovy věty 189
6.4. L'Hospitalovo pravidlo 191
Cvičení 196

7. Taylorův vzorec 197

7.1. Taylorův a Maclaurinův polynom 197
7.2. Taylorova věta 200
7.3. Užití Taylorova vzorce na elementární funkce 204
Cvičení 207

V. APLIKACE DIFERENCIÁLNÍHO POČTU

1. Průběh funkce 208

1.1. Monotonie funkcí 208
1.2. Lokální extrémy funkcí 209
1.3. Absolutní extrémy funkcí 212
Cvičení 214
1.4. Konvexní a konkávní funkce 215
1.5. Inflexe a inflexní body 220
Cvičení 222
1.6. Použití derivací vyšších řádů k lokálnímu vyšetřování průběhu funkce 222

1.7. Asymptoty grafu funkce ... 224
Cvičení ... 227
1.8. Celkové vyšetření průběhu funkce. Příklady ... 228
Cvičení ... 233

2. Užití diferenciálního počtu v geometrii ... 233

2.1. Křivka v rovině ... 233
2.2. Rovnice křivky v polárních souřadnicích ... 238
2.3. Některé důležité křivky ... 239
2.4. Funkce daná parametricky ... 241
2.5. Vyšetřování průběhu rovinné křivky dané parametricky ... 245
*2.6. Kružnice křivosti rovinné křivky ... 247
Cvičení ... 252

VI. PRIMITIVNÍ FUNKCE

1. Definice a základní vlastnosti ... 253

1.1. Motivace ... 253
1.2. Definice primitivní funkce ... 253
1.3. Poznámky k definici ... 254

2. Výpočet primitivní funkce ... 255

2.1. Existence a další vlastnosti primitivní funkce ... 255
2.2. Integrace metodou per partes ... 258
2.3. Integrace substituční metodou ... 260
Cvičení ... 262

3. Integrace racionální funkce ... 264

3.1. Integrály parciálních zlomků ... 264
3.2. Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky ... 266
3.3. Příklady integrace racionálních funkcí ... 270
Cvičení ... 271

4. Integrály některých dalších elementárních funkcí ... 272

4.1. Integrály některých iracionálních funkcí ... 272
4.2. Integrály některých goniometrických funkcí ... 275
4.3. Integrály tvaru $\int R(e^{\alpha x})\,dx$, kde $R(u)$ je racionální funkce proměnné u ... 281
4.4. Integrály tvaru $\int [R(\ln x)/x]\,dx$, kde $R(u)$ je racionální funkce proměnné u ... 281
Cvičení ... 282

5. Doplňky a poznámky ... 283

5.1. Elementárnost primitivní funkce ... 283
5.2. Zobecnění pojmu primitivní funkce ... 284
5.3. Integrál komplexní funkce reálné proměnné ... 284
Cvičení ... 286

VII. URČITÝ INTEGRÁL

1. Definice určitého integrálu ... 287

1.1. O jedné úloze vedoucí k pojmu určitého integrálu ... 287
1.2. Součtová definice integrálu ... 289

1.3. Newtonův-Leibnizův vzorec 292
Cvičení 294

2. Integrovatelné funkce. Vlastnosti integrálu 294

2.1. Podmínky integrovatelnosti 294
2.2. Některé množiny integrovatelných funkcí 298
2.3. Vlastnosti integrálu 300
2.4. Integrál jako funkce horní meze 308
2.5. Určitý integrál komplexní funkce reálné proměnné 311
Cvičení 312

3. Výpočet určitého integrálu 312

3.1. Metoda per partes pro určité integrály 312
3.2. Substituční metoda pro určité integrály 314
*3.3. Přibližný výpočet integrálu 316
Cvičení 318

4. Aplikace určitého integrálu 319

4.1. Obsah rovinného geometrického útvaru 319
4.2. Objem rotačního tělesa 323
4.3. Délka křivky 326
4.4. Obsah rotační plochy 333
4.5. Aditivní funkce intervalu 336
4.6. Statické momenty a těžiště 340
4.7. Některé další příklady užití integrálu ve fyzice 345
Cvičení 348

5. Nevlastní integrály 350

5.1. Definice a základní vlastnosti 350
5.2. Výpočet nevlastních integrálů 355
5.3. Kritéria konvergence nevlastních integrálů 357
Cvičení 364

VIII. ŘADY

1. Číselné řady 366

1.1. Úvodní poznámky 366
1.2. Součet číselné řady. Konvergence číselných řad 367
1.3. Některé vlastnosti číselných řad 370
1.4. Řady s nezápornými členy. Kritéria konvergence 372
1.5. Řady s libovolnými členy. Absolutní a neabsolutní konvergence 380
1.6. Přerovnávání a násobení řad 386
Cvičení 389

2. Základní poznatky o funkčních řadách 390

2.1. Bodová konvergence funkční řady 390
2.2. Stejnoměrná konvergence. Weierstrassovo kritérium 393
2.3. Spojitost součtu řady. Integrace a derivování řady po členech 396
Cvičení 400

3. Mocninné řady 400

3.1. Konvergence mocninných řad 400

3.2. Operace s mocninnými řadami 405
3.3. Derivování a integrování mocninných řad 406
Cvičení 408

4. Rozvoj funkce v mocninnou řadu. Taylorova řada 409

4.1. Taylorova řada dané funkce a její konvergence 409
4.2. Taylorovy rozvoje některých elementárních funkcí 412
4.3. Použití mocninných řad 417
*4.4. Mocninné řady v komplexním oboru 421
Cvičení 425

IX. ELEMENTÁRNÍ METODY ŘEŠENÍ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

1. Úvod a základní pojmy 426

1.1. Úlohy vedoucí na diferenciální rovnice 426
1.2. Některé základní pojmy z teorie diferenciálních rovnic 429
1.3. Diferenciální rovnice prvního řádu 430
Cvičení 435

2. Elementární způsoby integrace diferenciálních rovnic 435

2.1. Separace proměnných 435
2.2. Transformace diferenciální rovnice 443
2.3. Rovnice tvaru $y' = f(ax + by + c)$ 445
2.4. Homogenní rovnice 446
Cvičení 451

3. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu 452

3.1. Homogenní rovnice 452
3.2. Nehomogenní rovnice 453
3.3. Příklady na aplikace lineární diferenciální rovnice 455
Cvičení 457

X. ZÁVĚR. SVĚTONÁZOROVÉ ASPEKTY STUDIA MATEMATIKY

1. Matematika a vědecký světový názor 458
2. Pohled do historie matematiky 458
3. Základní rysy současné matematiky 462
4. Stručné shrnutí 462

Literatura 464
Výsledky cvičení 465
Rejstřík 476