OBSAH

Předmluva k českému vydání 13

Z předmluvy k druhému ruskému vydání 14

Předmluva k třetímu ruskému vydání 16

Přehled označení a značek 17

Množiny 17
Zobrazení 18
Topologické prostory 19
Míra a integrál 22
Diferenciální počet v lineárních prostorech 23

PRVNÍ ČÁST

ZÁKLADY TEORIE MNOŽIN

1. Pojem množiny. Množinové operace 26
1.1. Základní definice 26
1.2. Množinové operace 27

2. Zobrazení. Rozklad v třídy 30
2.1. Zobrazení množin 30
2.2. Rozklad v třídy. Ekvivalence 32

3. Ekvivalence množin. Mohutnost množiny 35
3.1. Konečné a nekonečné množiny 35
3.2. Spočetné množiny 36
3.3. Ekvivalence množin 39
3.4. Nespočetnost množiny všech reálných čísel 40
3.5. Cantorova-Bernštejnova věta 42
3.6. Mohutnost množiny 43

4. Uspořádané množiny. Transfinitní ordinální čísla 46
4.1. Částečně uspořádané množiny 46
4.2. Zobrazení zachovávající uspořádání 47
4.3. Ordinální typy. Uspořádané množiny 47
4.4. Uspořádané sjednocení uspořádaných množin. Uspořádaný kartézský součin uspořádaných množin 49
4.5. Dobře uspořádané množiny. Transfinitní ordinální čísla 50
4.6. Porovnávání ordinálních čísel 52

4.7. Axióm výběru, Zermelova věta a jiná tvrzení s nimi ekvivalentní 54
4.8. Transfinitní indukce 56

5. Systémy množin 57
5.1. Množinový okruh 57
5.2. Množinový polookruh 59
5.3. Množinový okruh vytvořený množinovým polookruhem 60
5.4. σ-algebry 62
5.5. Systémy množin a zobrazení 63

DRUHÁ ČÁST
METRICKÉ A TOPOLOGICKÉ PROSTORY

1. Pojem metrického prostoru 66
1.1. Definice metrického prostoru. Příklady 66
1.2. Spojitá zobrazení metrických prostorů. Izometrická zobrazení 74

2. Konvergence. Otevřené a uzavřené množiny 75
2.1. Hromadné body. Uzávěr množiny 75
2.2. Konvergence 77
2.3. Husté podmnožiny 78
2.4. Otevřené a uzavřené množiny 79
2.5. Otevřené a uzavřené množiny v reálné ose 81

3. Úplné metrické prostory 86
3.1. Definice úplného metrického prostoru. Příklady 86
3.2. Věta o posloupnosti do sebe vnořených uzavřených koulí 89
3.3. Bairova věta 91
3.4. Úplný obal metrického prostoru 91

4. Princip kontraktivních zobrazení a jeho použití 95
4.1. Princip kontraktivních zobrazení 95
4.2. Nejjednodušší aplikace principu kontraktivních zobrazení 96
4.3. Věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic 99
4.4. Použití principu kontraktivních zobrazení pro integrální rovnice 102

5. Topologické prostory 105
5.1. Definice topologického prostoru. Příklady 105
5.2. Porovnávání topologií 107
5.3. Úplné systémy okolí. Báze. Axiómy spočetnosti 107
5.4. Konvergentní posloupnosti v topologickém prostoru 111
5.5. Spojitá zobrazení. Homeomorfismus 112
5.6. Axiómy oddělování 114
5.7. Různé způsoby zavedení topologie v prostoru. Metrizovatelnost 117

6. Kompaktnost 118
6.1. Pojem kompaktnosti 118
6.2. Spojitá zobrazení kompaktních prostorů 121
6.3. Spojité a polospojité funkce v kompaktních prostorech 121
6.4. Spočetná kompaktnost 124
6.5. Prekompaktní množiny 126

7. Kompaktnost v metrických prostorech 127
7.1. Totální ohraničenost 127

7.2. Kompaktnost a totální ohraničenost 129
7.3. Prekompaktní podmnožiny v metrických prostorech 130
7.4. Arzelàova věta 130
7.5. Peanova věta 133
7.6. Stejnoměrná spojitost. Spojitá zobrazení kompaktních metrických prostorů 135
7.7. Zobecnění Arzelàovy věty 136

8. SPOJITÉ KŘIVKY V METRICKÝCH PROSTORECH 137

TŘETÍ ČÁST
NORMOVANÉ A TOPOLOGICKÉ LINEÁRNÍ PROSTORY

1. LINEÁRNÍ PROSTORY 144
1.1. Definice lineárního prostoru. Příklady 144
1.2. Lineární závislost 147
1.3. Podprostory 147
1.4. Faktorové prostory 148
1.5. Lineární funkcionály 149
1.6. Geometrický význam lineárního funkcionálu 151

2. KONVEXNÍ MNOŽINY A KONVEXNÍ FUNKCIONÁLY. HAHNOVA-BANACHOVA VĚTA 154
2.1. Konvexní množiny a konvexní tělesa 154
2.2. Konvexní funkcionály 156
2.3. Minkowského funkcionál 157
2.4. Hahnova-Banachova věta 159
2.5. Oddělování konvexních množin v lineárním prostoru 162

3. NORMOVANÉ PROSTORY 164
3.1. Definice normovaného prostoru. Příklady 164
3.2. Podprostory normovaného prostoru 166

4. UNITÁRNÍ PROSTORY 167
4.1. Definice unitárního prostoru 167
4.2. Příklady 169
4.3. Existence ortogonálních bází, ortogonalizace 171
4.4. Besselova nerovnost. Uzavřené ortogonální systémy 174
4.5. Úplné unitární prostory. Rieszova-Fischerova věta 177
4.6. Hilbertův prostor. Věta o izomorfismu 179
4.7. Podprostory, ortogonální doplňky, direktní součet 182
4.8. Charakteristická vlastnost unitárních prostorů 186
4.9. Komplexní unitární prostory 189

5. TOPOLOGICKÉ LINEÁRNÍ PROSTORY 191
5.1. Definice topologického lineárního prostoru. Příklady 191
5.2. Lokální konvexnost 194
5.3. Spočetně normované prostory 195

ČTVRTÁ ČÁST
LINEÁRNÍ FUNKCIONÁLY A LINEÁRNÍ OPERÁTORY

1. SPOJITÉ LINEÁRNÍ FUNKCIONÁLY 200
1.1. Spojité lineární funkcionály v topologických lineárních prostorech 200
1.2. Lineární funkcionály v normovaných prostorech 201
1.3. Hahnova-Banachova věta v normovaném prostoru 205

1.4. Lineární funkcionály ve spočetně normovaném prostoru 206

2. Adjungovaný prostor 207

2.1. Definice adjungovaného prostoru 207
2.2. Silná topologie v adjungovaném prostoru 208
2.3. Příklady adjungovaných prostorů 210
2.4. Druhý adjungovaný prostor 216

3. Slabá topologie a slabá konvergence 218

3.1. Slabá topologie a slabá konvergence v topologickém lineárním prostoru 218
3.2. Slabá konvergence v normovaných prostorech 219
3.3. Slabá topologie a slabá konvergence v adjungovaném prostoru 224
3.4. Ohraničené množiny v adjungovaném prostoru 226

4. Distribuce 229

4.1. Rozšíření pojmu funkce 229
4.2. Prostor základních funkcí 230
4.3. Distribuce 232
4.4. Operace s distribucemi 233
4.5. Dostatečně bohatá množina základních funkcí 237
4.6. Diferenciální rovnice v třídě distribucí 238
4.7. Některá zobecnění 241

5. Lineární operátory 244

5.1. Definice lineárního operátoru. Příklady 244
5.2. Spojitost a ohraničenost 247
5.3. Součet a součin operátorů 249
5.4. Inverzní operátor, invertovatelnost 251
5.5. Adjungované operátory 256
5.6. Adjungovaný operátor v unitárním prostoru. Samoadjungované operátory 258
5.7. Spektrum operátoru. Rezolventa 259

6. Kompaktní operátory 262

6.1. Definice kompaktního operátoru. Příklady 262
6.2. Základní vlastnosti kompaktních operátorů 267
6.3. Vlastní hodnoty kompaktního operátoru 270
6.4. Kompaktní operátory v Hilbertově prostoru 271
6.5. Samoadjungované kompaktní operátory v Hilbertově prostoru 271

PÁTÁ ČÁST
MÍRA, MĚŘITELNÉ FUNKCE, INTEGRÁL

1. Míra rovinných množin 278

1.1. Míra elementárních množin 278
1.2. Lebesgueova míra rovinných množin 282
1.3. Některé doplňky a zobecnění 289

2. Obecný pojem míry. Prodloužení míry z množinového polookruhu na množinový okruh. Aditivnost a σ-aditivnost 292

2.1. Definice míry 292
2.2. Prodloužení míry z množinového polookruhu na množinový okruh jím vytvořený 292
2.3. σ-aditivnost 295

3. LEBESGUEOVO PRODLOUŽENÍ MÍRY 298
3.1. Lebesgueovo prodloužení míry definované v množinovém polookruhu s jednotkou 298
3.2. Prodloužení míry dané v množinovém polookruhu bez jednotky 302
3.3. Rozšíření pojmu měřitelnosti v případě σ-konečné míry 304
3.4. Jordanovo prodloužení míry 306
3.5. Jednoznačnost prodloužení míry 308

4. MĚŘITELNÉ FUNKCE 310
4.1. Definice a základní vlastnosti měřitelných funkcí 310
4.2. Operace s měřitelnými funkcemi 311
4.3. Ekvivalence 313
4.4. Konvergence skoro všude 314
4.5. Jegorovova věta 315
4.6. Konvergence podle míry 316
4.7. Luzinova věta. C-vlastnost 319

5. LEBESGUEŮV INTEGRÁL 320
5.1. Jednoduché funkce 320
5.2. Lebesgueův integrál jednoduché funkce 321
5.3. Obecná definice Lebesgueova integrálu v množině konečné míry 323
5.4. σ-aditivnost a absolutní spojitost Lebesgueova integrálu 326
5.5. Záměna limity a integrace pro Lebesgueův integrál 331
5.6. Lebesgueův integrál přes množinu nekonečné míry 336
5.7. Porovnání Lebesgueova a Riemannova integrálu 337

6. KARTÉZSKÉ SOUČINY MNOŽIN A MĚR. FUBINIOVA VĚTA 340
6.1. Kartézské součiny systémů množin 340
6.2. Součiny měr 342
6.3. Vyjádření dvojrozměrné míry pomocí integrálu jednorozměrné míry řezů a geometrická definice Lebesgueova integrálu 345
6.4. Fubiniova věta 348

ŠESTÁ ČÁST
NEURČITÝ LEBESGUEŮV INTEGRÁL. OBECNÉ VĚTY O DERIVACI

1. MONOTÓNNÍ FUNKCE. DERIVACE INTEGRÁLU PODLE HORNÍ MEZE 355
1.1. Základní vlastnosti monotónních funkcí 355
1.2. Derivace monotónní funkce 359
1.3. Derivace integrálu podle horní meze 366

2. FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ 366

3. DERIVACE NEURČITÉHO LEBESGUEOVA INTEGRÁLU 371

4. ABSOLUTNĚ SPOJITÉ FUNKCE 373

5. LEBESGUEŮV INTEGRÁL JAKO MNOŽINOVÁ FUNKCE. RADONOVA-NIKODYMOVA VĚTA 382
5.1. Náboje. Hahnův rozklad a Jordanův rozklad 382
5.2. Základní typy nábojů 386
5.3. Absolutně spojité náboje. Radonova-Nikodymova věta 386

6. STIELTJESŮV INTEGRÁL 390
6.1. Stieltjesovy míry 390

6.2. Lebesgueův-Stieltjesův integrál 392
6.3. Některé aplikace Lebesgueova-Stieltjesova integrálu v teorii pravděpodobnosti 393
6.4. Riemannův-Stieltjesův integrál 395
6.5. Záměna limity a integrace pro Stieltjesův integrál 399
6.6. Obecný tvar lineárních spojitých funkcionálů v prostoru spojitých funkcí 403

SEDMÁ ČÁST
PROSTORY INTEGROVATELNÝCH FUNKCÍ

1. PROSTOR L_1 408
1.1. Definice a základní vlastnosti prostoru L_1 408
1.2. Husté množiny v prostoru L_1 410

2. PROSTOR L_2 414
2.1. Definice a základní vlastnosti prostoru L_2 414
2.2. Případ prostoru nekonečné míry 417
2.3. Husté množiny v prostoru L_2. Věta o izomorfismu 419
2.4. Komplexní prostor L_2 420
2.5. Konvergence v průměru druhého stupně a její souvislost s jinými typy konvergence funkcionálních posloupností 421

3. ORTOGONÁLNÍ SYSTÉMY FUNKCÍ V PROSTORU L_2. ŘADY VZHLEDEM K ORTOGONÁLNÍM SYSTÉMŮM 423
3.1. Systém trigonometrických funkcí. Fourierova řada vzhledem k systému trigonometrických funkcí 423
3.2. Systémy trigonometrických funkcí v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ 426
3.3. Fourierova řada v komplexním tvaru 427
3.4. Legendrovy polynomy 428
3.5. Ortogonální systémy v kartézských součinech. Násobné Fourierovy řady 431
3.6. Ortogonální polynomy s váhou 433
3.7. Ortogonální báze v prostoru $L_2(-\infty, +\infty)$. Hermitovy funkce 434
3.8. Ortogonální polynomy s diskrétní váhou 436
3.9. Haarovy, Rademacherovy a Walshovy systémy 438

OSMÁ ČÁST
TRIGONOMETRICKÉ ŘADY. FOURIEROVA TRANSFORMACE

1. PODMÍNKY KONVERGENCE FOURIEROVY ŘADY 442
1.1. Postačující podmínky pro bodovou konvergenci Fourierovy řady 442
1.2. Podmínky stejnoměrné konvergence Fourierovy řady 448

2. FEJÉROVA VĚTA 450
2.1. Fejérova věta 450
2.2. Úplnost systému trigonometrických funkcí. Weierstrassova věta 453
2.3. Fejérova věta v prostoru L_1 454

3. FOURIERŮV INTEGRÁL 455
3.1. Základní věta 455
3.2. Fourierův integrál v komplexním tvaru 458

4. FOURIEROVA TRANSFORMACE, JEJÍ VLASTNOSTI A POUŽITÍ 459
4.1. Fourierova transformace a inverzní vzorec 459
4.2. Základní vlastnosti Fourierovy transformace 463

4.3. Úplnost systémů Hermitových a Laguerrových funkcí 466
4.4. Fourierova transformace funkcí, které v nevlastních bodech rychle konvergují k nule a mají derivace všech řádů 467
4.5. Fourierova transformace a konvoluce funkcí 468
4.6. Použití Fourierovy transformace při řešení rovnice vedení tepla 469
4.7. Fourierova transformace funkcí několika proměnných 471

5. Fourierova transformace v prostoru $L_2(-\infty, +\infty)$ 474
5.1. Plancherelova věta 474
5.2. Hermitovy funkce 477

6. Laplaceova transformace 480
6.1. Definice a základní vlastnosti Laplaceovy transformace 480
6.2. Použití Laplaceovy transformace k řešení diferenciálních rovnic (operátorová metoda) . . . 482

7. Fourierova-Stieltjesova transformace 484
7.1. Definice Fourierovy-Stieltjesovy transformace 484
7.2. Použití Fourierovy-Stieltjesovy transformace v teorii pravděpodobnosti 485

8. Fourierova transformace distribucí 488

DEVÁTÁ ČÁST
LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ ROVNICE

1. Základní definice. Některé úlohy vedoucí k integrálním rovnicím 492
1.1. Typy integrálních rovnic 492
1.2. Některé úlohy vedoucí k integrálním rovnicím 493

2. Fredholmovy integrální rovnice 496
2.1. Fredholmův integrální operátor 496
2.2. Rovnice se symetrickým jádrem 499
2.3. Fredholmovy věty. Případ degenerovaných jader 501
2.4. Fredholmovy věty pro rovnice s nedegenerovanými jádry 503
2.5. Volterrovy rovnice 507
2.6. Integrální rovnice prvního druhu 508

3. Integrální rovnice obsahující parametr. Fredholmova metoda 509
3.1. Spektrum kompaktního operátoru v Hilbertově prostoru 509
3.2. Hledání řešení ve tvaru mocninné řady podle mocnin parametru λ. Fredholmovy determinanty 511

DESÁTÁ ČÁST
ZÁKLADY DIFERENCIÁLNÍHO POČTU V LINEÁRNÍCH PROSTORECH

1. Diferenciály v lineárních prostorech 516
1.1. Silný diferenciál (Fréchetův diferenciál) 516
1.2. Slabý diferenciál (Gateauxův diferenciál) 519
1.3. Věta o přírůstku 519
1.4. Souvislost mezi slabou a silnou diferencovatelností 520
1.5. Diferencovatelné funkcionály 522
1.6. Abstraktní funkce 523
1.7. Integrál 523
1.8. Derivace vyšších řádů 526
1.9. Diferenciály vyšších řádů 528

1.10. Taylorův vzorec . . . 529

2. Extremální úlohy . . . 530

2.1. Nutná podmínka pro existenci extrému funkcionálu . . . 530
2.2. Druhý diferenciál. Postačující podmínky pro existenci extrému funkcionálu . . . 534

3. Newtonova metoda . . . 536

DODATEK
BANACHOVY ALGEBRY

1. Definice Banachovy algebry. Příklady . . . 542

1.1. Banachovy algebry. Izomorfismy Banachových algeber . . . 542
1.2. Příklady Banachových algeber . . . 543
1.3. Maximální ideály . . . 546

2. Spektrum a rezolventa . . . 547

2.1. Definice a příklady . . . 547
2.2. Vlastnosti spektra . . . 548
2.3. Věta o spektrálním poloměru . . . 551

3. Některé pomocné výsledky . . . 552

3.1. Věta o faktorové algebře . . . 552
3.2. Tři lemmata . . . 554

4. Základní věty . . . 555

4.1. Spojité lineární multiplikativní funkcionály a maximální ideály . . . 555
4.2. Topologie v množině $\mathscr{M}$. Základní věty . . . 557
4.3. Wienerova věta . . . 560

Přehled literatury . . . 563

Rozdělení literatury podle částí knihy . . . 566

Rejstřík symbolů . . .

Rejstřík . . .