

Obsah

1	Kmitavá soustava s jedním stupněm volnosti	16
1.1	Výchozí model	16
1.2	Viskozní tlumení	17
1.2.1	Vlastní kmitání	17
1.2.2	Vynucené kmitání	19
1.2.3	Přenos soustavy	20
1.2.4	Frekvenční charakteristiky	22
1.3	Hysterezní tlumení	23
1.3.1	Vlastní kmitání	23
1.3.2	Vynucené kmitání	24
1.4	Proporcionální tlumení	26
1.5	Nyquistův diagram	26
1.6	Energetické bilance	27
2	Analýza lineárních soustav se soustředěnými prvky	29
2.1	Vymezení	29
2.2	Jednorozměrné soustavy	29
2.2.1	Základní pojmy	29
2.2.2	Mechanická impedance	30
2.2.3	Praktické výpočty	33
2.3	Elektromechanická analogie	34
2.4	Vyjádření v maticovém zápisu	36
2.4.1	Impedanční matice soustavy	36
2.4.2	Duální soustava	39
2.4.3	Poznámky k programování výpočtu	40
2.5	Rovinné soustavy	41
2.5.1	Sestavení impedanční matice	41
2.5.2	Praktické výpočty	43
2.6	Prostorové soustavy	45
3	Užití analytických řešení pro dynamické výpočty	47
3.1	Vymezení	47
3.2	Obecné řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty	48
3.2.1	Základní algoritmus	48
3.2.2	Příklady výpočtu modálních vlastností	50
3.3	Řešení soustav diferenciálních rovnic s více proměnnými	52
3.4	Složitější případy okrajových podmínek	54
3.4.1	Řešení soustavy diferenciálních rovnic se vzájemně vázanými okrajovými podmínkami	54
3.4.2	Připojení soustředěných prvků	55
3.4.3	Budicí účinky v okrajových podmínkách	57
3.5	Výpočet bezrozměrových vlastních frekvencí složitějších kmitavých systémů	59
3.6	Použití u soustav zvláštního typu	60
3.6.1	Soustavy s tlumením	60
3.6.2	Nepřizmatické průřezy kontinuí	60
3.6.3	Kmitání stlačitelné tekutiny v poddajné potrubní síti	61

4	Modální rozklad u soustav s konečným počtem stupňů volnosti	65
4.1	Užívané pojmy a jejich výklad	65
4.2	Soustava bez tlumení	66
4.2.1	Vlastní hodnoty	66
4.2.2	Ortogonalita vlastních vektorů	67
4.2.3	Normování vlastních vektorů	68
4.2.4	Modální transformace pohybových rovnic	69
4.2.5	Přenos mezi vstupem a výstupem	70
4.3	Soustava s tlumením	70
4.3.1	Hysterezní tlumení	70
4.3.2	Proporcionální tlumení	72
4.4	Řešení obecného případu viskozního tlumení ve stavovém prostoru	72
4.4.1	Stavový model soustavy	72
4.4.2	Vlastní frekvence	73
4.4.3	Vlastní vektory	74
4.4.4	Modální transformace	75
4.4.5	Přenos	75
4.4.6	Příklad analýzy soustavy s viskozním tlumením	77
4.4.7	Poznámky	78
5	Modální rozklad u soustav s jednorozměrnými kontinui	81
5.1	Příčné kmitání jednorozměrného kontinua	81
5.1.1	Vlastní frekvence a vlastní tvary kmitu	81
5.1.2	Řešení úplné rovnice	84
5.1.3	Přenos	85
5.1.4	Rozvedení možností metody a poznámky k praktickému výpočtu	86
5.2	Torzní kmitání	89
5.3	Podélné kmitání	91
5.4	Prostorové kmitání	92
5.5	Kmitání soustav tvořených nosníky a připojenými nespojitostmi	93
5.5.1	Paralelní skladba	94
5.5.2	Seriová skladba	95
5.5.3	Připojení nespojitostí	96
5.5.4	Transformace geometrických souřadnic	96
5.5.5	Výpočet modálních vlastností	97
5.5.6	Poznámky k numerickým výpočtům	99
6	Vybrané aplikace modální analýzy	101
6.1	Modální zlomek	101
6.1.1	Výchozí odvození	101
6.1.2	Poznámky k praktickému použití	102
6.2	Strukturální dynamická modifikace	103
6.2.1	Výchozí vymezení	103
6.2.2	Definování spoje mezi výchozí a připojovanou strukturou	104
6.2.3	Sestavení matematického modelu kompozitní soustavy	104
6.2.4	Shrnutí algoritmu výpočtu	105
6.2.5	Poznámky k praktickému použití	106
6.3	Kriterium modální věrnosti	106
6.3.1	Výchozí definice	106
6.3.2	Znázorňování a úpravy kritéria	107
6.3.3	Rozvedení pro další aplikace	108

6.4	Identifikace frekvenčně blízkých tvarů kmitu	108
6.4.1	Úvodní poznámky	108
6.4.2	Výchozí rovnice	109
6.4.3	Izolace tvaru kmitu řízením afinního buzení	110
6.4.4	Vyšetření modálních parametrů	111
6.5	Výpočet odezvy na seismické buzení	113
6.5.1	Výpočet pro soustavu uvažovanou jako tuhé těleso	114
6.5.2	Výpočet pro soustavu s uvažováním jejích kmitavých vlastností	114
6.6	Sestavení matic chyb popisu soustavy	115
7	Redukce dynamických modelů	117
7.1	Statická redukce pomocí superprvků	117
7.1.1	Torzně a podélně kmitající soustavy	117
7.1.2	Příčně kmitající soustavy s nosníky	118
7.2	Dynamické redukce v geometrické oblasti	119
7.2.1	Přeskupení prvků výchozích matic	119
7.2.2	Vlastní redukce	120
7.2.3	Zobecnění	120
7.2.4	Volba vypouštěných souřadnic	121
7.3	Dynamická redukce ve stavové oblasti	122
7.4	Dynamické redukce v modální oblasti	123
7.4.1	Splnění podmínky ortonormality	123
7.4.2	Redukce přímým vypuštěním modálních souřadnic	124
7.4.3	Redukce s užitím pseudoinverze modální matice	124
7.4.4	Zlepšená redukce s užitím iterací	125
7.4.5	Zhodnocení jednotlivých metod	125
7.5	Redukce metodou simultánních iterací	126
7.6	Redukce modelu s cílem výběru míst působících sil	129
7.7	Posuzování výsledků redukce	130
8	Užití stavového prostoru pro modelování dynamických jevů	132
8.1	Stavový model dynamické soustavy	132
8.2	Řešení stavové rovnice	133
8.2.1	Řešení pro spojité funkce času	133
8.2.2	Řešení pro diskrétní funkce času	134
8.3	Určování přenosů mechanických soustav	135
8.3.1	Výpočet odezvy mechanické soustavy ve frekvenční oblasti	135
8.3.2	Přenos vyjádřený podíly polynomů	136
8.3.3	Soustava s jedním vstupem a jedním výstupem	136
8.3.4	Soustava s jedním vstupem a více výstupy	137
8.3.5	Výpočet odezvy soustavy s užitím podílu polynomů	138
8.4	Řízené chování mechanických soustav	138
8.4.1	Transformace stavů	138
8.4.2	Vyjádření stavových rovnic v Jordanově kanonickém tvaru	139
8.4.3	Dosažitelnost stavu	139
8.4.4	Pozorovatelnost stavu	140
8.4.5	Stavová zpětná vazba	140
8.5	Modelování přechodových dějů s využitím maticové exponenciely	142
8.5.1	Soustavy s diskrétními prvky	142
8.5.2	Soustavy s kontinui	142

8.6	Výpočet maticové exponenciely	145
8.6.1	Analytický výpočet	145
8.6.2	Ověřování a úpravy výpočtu	146
8.6.3	Souvislost s numerickou integrací	147
9	Přibližné metody výpočtu modálních vlastností	150
9.1	Rayleighova metoda	150
9.1.1	Teoretický základ	150
9.1.2	Příklady použití pro analýzu kmitání neprizmatických krakorců	152
9.2	Ritzova metoda	153
9.2.1	Teoretický základ	153
9.2.2	Použití pro analýzu kmitání soustav s nosníky a nespojitostmi	154
9.3	Galerkinova metoda	155
9.3.1	Teoretický základ	156
9.3.2	Příklad použití pro analýzu kmitů potrubí, protékaného kapalinou	156
9.3.3	Příklad kmitání nosníku v nelineárním poli elektrických sil	158
10	Použití metody konečných prvků u soustav s nosníky	161
10.1	Užívané pojmy a souvislosti	161
10.2	Nosníkový prvek	162
10.2.1	Matice tuhosti	162
10.2.2	Matice hmotnosti	164
10.3	Sestavení globálních matic soustavy	165
10.4	Komentář k programování výpočtu	166
10.5	Příklady použití metody a ověření výsledků	167
11	Vibrátory	170
11.1	Rovinné pole kmitů tělesa s jedním vibrátorem	170
11.2	Rovinné pole kmitů tělesa se dvěma vibrátory	171
11.3	Podmínky autosynchronizace dvou vibrátorů upevněných na volném rovinném tělese	173
11.4	Výpočet časových závislostí parametrů pohonu při jeho rozběhu účinkem momentu s danou charakteristikou	177
11.5	Prostředky pro výpočet dynamického chování soustav těles	178
12	Aktivní užití vibrací	181
12.1	Vibrační doprava	181
12.2	Vibrační třidiče	183
12.2.1	Doporučení pro koncepci	183
12.2.2	Příklad návrhu jednohmotového vibračního třidiče	185
12.2.3	Příklad dvouhmotového třidiče s eliminací sil do základu	187
12.2.4	Poznámky ke konstrukci	191

13	Kmitavé jevy při průtoku tekutiny potrubím	194
13.1	Užité předpoklady a vymezení problému	194
13.2	Potrubní vedení modelované soustředěnými prvky	197
13.2.1	Silové poměry	197
13.2.2	Průtokové poměry	198
13.2.3	Charakteristická impedance potrubního úseku	199
13.2.4	Fázová rychlost	200
13.2.5	Shrnutí výsledků pro kvazistacionární průtok	201
13.2.6	Bezztrátový průtok	201
13.2.7	Nestacionární průtok	202
13.3	Potrubní vedení s rozprostřenými parametry	203
13.3.1	Odvození z výchozích diferenciálních rovnic	203
13.3.2	Odvození s užitím stavového modelu	204
13.4	Sestavení modelu pro analýzu pulsací tekutiny v potrubních soustavách	205
13.4.1	Používané matice	205
13.4.2	Vytváření popisu potrubních soustav	206
13.4.3	Okrajové podmínky	208
13.4.4	Vazba potrubní a mechanické soustavy	208
14	Souvislost změn modálních vlastností se stabilitou konstrukcí	210
14.1	Základní vztahy	210
14.2	Tangenciální pohybová rovnice	212
14.3	Experimentální ověřování	213
14.3.1	Kyvadlo s destabilizující silou	213
14.3.2	Osové zatěžovaný nosník	214
14.3.3	Osové zatěžování válcové skořepiny	216
15	Prostředky k vyšetřování dynamického chování nelineárních soustav	218
15.1	Analýza ve fázové rovině	220
15.1.1	Výchozí poznatky	220
15.1.2	Singulární body a jejich klasifikace	222
15.1.3	Znázorňování trajektorií ve fázové rovině	224
15.1.4	Zahrnutí vlivu budičích účinků	226
15.1.5	Analýza složitějších případů	228
15.2	Skeletové křivky a limitní obálky	230
15.2.1	Užití metody harmonické rovnováhy	230
15.2.2	Zobecnění	231
15.2.3	Komentář	233
15.3	Samobuzené systémy	234
16	Bifurkace a chaotické chování u nelineárních soustav	237
16.1	Vymezení a základní pojmy	237
16.2	Výchozí příklady	238
16.2.1	Nelineární rovnice Duffingova typu	238
16.2.2	Turbulentní proudění tekutin	239
16.2.3	Logistická funkce	239

16.3	Užívané úpravy rovnic a způsoby prezentace výsledků	240
16.3.1	Transformace	240
16.3.2	Orbitální graf	240
16.3.3	Další užívaná grafická vyjádření	241
16.4	Vyšetřování oblastí s odlišným vývojovým chováním	243
16.4.1	Oblast stabilního vývoje a stacionární body	243
16.4.2	Oblast bifurkací	244
16.4.3	Oblast chaosu	246
16.4.4	Oblast divergence	247
16.5	Prostředky k posuzování stability vývoje	247
16.5.1	Ljapunovův exponent	248
16.5.2	Fraktální dimenze	249
16.6	Vícerozměrná vývojová zobrazení	251
16.7	Vývojová zobrazení u mechanických soustav	253
16.7.1	Použití metody numerické integrace pohybových rovnic	253
16.7.2	Vývojové zobrazení bez použití numerické integrace	254
16.8	Příklady chaotického chování prakticky významných mechanických soustav	256
16.8.1	Rotor s anizotropní tuhostí ložisek	256
16.8.2	Třískový obráběcí stroj	258
17	Kmitání kruhových oblouků	261
17.1	Výchozí skutečnosti a pojmy	261
17.1.1	Předpoklady výpočtu	261
17.1.2	Základní označení	261
17.1.3	Rovnováha silových účinků působících na segment oblouku	263
17.2	Odvození pohybových rovnic	264
17.2.1	Pohyb v rovině oblouku	264
17.2.2	Pohyb kolmo k rovině oblouku	265
17.2.3	Kruhový oblouk na pružném podkladu	266
17.3	Řešení pohybových rovnic	267
17.3.1	Pohyb v rovině oblouku	267
17.3.2	Pohyb kolmo k rovině oblouku	269
17.4	Zobecnění výsledků výpočtu	270
17.5	Ověření výpočtu	272
18	Příklady programů	274
18.1	Koncepce	274
18.2	Elastostatický a elastodynamický výpočet prostorové prutové soustavy s připojenými soustředěnými hmotami	275
18.2.1	Popis	275
18.2.2	Příklad	277
18.3	Analytické řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty	279
18.3.1	Příprava vstupních dat	279
18.3.2	Organizace výpočtu	279
18.3.3	Příklad	282
18.4	Sestavení matice tuhosti a hmotnosti prostorové soustavy s nosníky a ne- spojitostmi	282
18.4.1	Popis programu	282
18.4.2	Příklady	284

Použitá označení

a		obecná konstanta, koeficienty polynomu jmenovatele přenosu
A		amplituda harmonického signálu
\mathbf{A}		matice dynamiky ve stavovém modelu soustavy, incidenční matice
b	$/\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}/$	koeficient viskozního útlumu
b		koeficienty polynomu jmenovatele přenosu
$\mathbf{B}_v, \mathbf{B}_h, \mathbf{B}_p$		matice viskozních, hysterezních, proporcionálních útlumů
\mathbf{B}		váhová matice vstupu ve stavovém modelu, zpětně kaskádní matice
c	$/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}/$	rychlost, rychlost šíření podélných vln
C	$/\text{F}/$	kapacita
\mathbf{C}		váhová matice stavového vektoru, matice kritéria MAC, kaskádní matice
d, D	$/\text{m}/$	rozměr průměru
d		fraktální dimenze
D	$/\text{N}\cdot\text{m}/$	ohybová tuhost desky
\mathbf{D}		váhová matice vstupu ve stavovém modelu soustavy
e		základ přirozených logaritmu; $e = 2.71828$
e	$/\text{m}/$	excentricita, vzdálenost krajního vlákna
E	$/\text{Pa}/$	Youngův modul pružnosti v tahu
$E\xi$		střední hodnota (mean) náhodné veličiny ξ
\mathbf{E}		maticová exponenciála, $\mathbf{E} = e^{\mathbf{A}T}$
$f(t)$	$/\text{N}/$	síla (časový průběh)
f	$/\text{Hz}/$	frekvence
F	$/\text{N}/$	síla
g	$/\text{m}\cdot\text{s}^{-2}/$	gravitační zrychlení
G	$/\text{Pa}/$	modul pružnosti ve smyku
h	$/\text{m}/$	rozměr, vzdálenost, šířka nosníku
$H(\omega)$		frekvenční přenos
\mathbf{H}		matice poddajnosti, matice frekvenčních přenosů
$i(t)$	$/\text{A}/$	časový průběh elektrického proudu
I_x	$/\text{kg}\cdot\text{m}^2/$	hmotový moment setrvačnosti k ose x
\mathbf{I}		jednotková matice (matice s jednotkami na diagonále)
j		imaginární jednotka, $j = \sqrt{-1}$
J	$/\text{m}^4/$	kvadratický moment (setrvačnosti) příčného řezu
J_p	$/\text{m}^4/$	polární moment setrvačnosti příčného řezu
J_i		Besselova funkce prvního druhu i -tého řádu
J_k	$/\text{m}^4/$	činitel momentu tuhosti GJ_k v kroucení
k	$/\text{N}\cdot\text{m}^{-1}/$	tuhost
\mathbf{K}		matice tuhosti, zpětnovazební matice
i, j, k		indexy
$i(t)$	$/\text{A}/$	časový průběh elektrického proudu
L	$/\text{H}/$	indukčnost
L	$/\text{m}/$	délka
m	$/\text{kg}/$	hmotnost
M	$/\text{N}\cdot\text{m}/$	moment síly
M	$/\text{kg}/$	hmotnost tělesa
\mathbf{M}		matice hmotnosti
n	$/-/$	počet, index vlastní frekvence, vlastního tvaru; $n = 1, 2, \dots, N$

N		matice tvarových funkcí
$p, p(x, t)$	/Pa/	tlak, okamžitý tlak v čase t v místě x
P	/W/	výkon
q, \mathbf{q}		modální souřadnice, vektor modálních souřadnic
Q, \mathbf{Q}		(obecná) amplituda
$q, q(x, t)$	/m ³ .s ⁻¹ /	vteřinový průtok tekutiny
Q	/m ³ .s ⁻¹ /	průtočné množství
r	/m/	poloměr
r		index referenčního bodu
R	/Ω/	rezistance (odpor)
Re	/-/	Reynoldsovo číslo
s		argument přenosu; pro ustálené harmonické signály $s = j\omega$
S	/m ² /	plocha (příčného řezu)
St	/-/	Stokesovo číslo
S		integrál maticové exponenciely
t	/s/	čas
T	/s/	časový interval
$u(t)$	/V/	časový průběh elektrického napětí
U	/V/	amplituda harmonického průběhu elektrického napětí
$U(x)$	/m/	tvar kmitu
v	/m.s ⁻¹ /	rychlost
V	/m ³ /	objem
V		matice pravostranných vlastních vektorů
$w(t)$	/m/	obecná výchylka resp. deformace
W		obecná amplituda
W		kriteriální funkce
W		matice levostranných vlastních vektorů
(x, y, z)		osy kartézského souřadného systému
$x(t)$		časový průběh obecného parametru soustavy, buzení
$X(f)$		Fourierův obraz buzení soustavy
$y(t)$		časový průběh odezvy soustavy
$Y(f)$		Fourierův obraz odezvy soustavy
Y		admitanční matice; $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$
z		funkce komplexní proměnné, analytická funkce
Z		impedance prvku soustavy se soustředěnými parametry
Z		impedanční matice
α	/rad/	úhel v obloukové míře
α	/-/	bezrozměrový koeficient
β	/-/	bezrozměrová vlastní frekvence, naladění; $\beta = \omega/\Omega$
γ	/m ⁻¹ /	vlnové číslo
γ	/-/	skos
Γ	/-/	poměrné přetížení vibrační dopravy
ε	/-/	přetvoření /μs/ (poměrná změna délky)
ζ	/-/	bezrozměrový koeficient viskozního útlumu
η	/-/	naladění; $\eta = \omega/\Omega$
ϑ	/-/	logaritmický dekrement útlumu
\varkappa	/-/	bezrozměrový koeficient hysterezního útlumu
κ	/-/	pulzační číslo, $\kappa^2 = St/4$

κ	/-/	vlastní číslo stability soustavy
λ	/m/	délka vlny
λ	/s ⁻² /	vlastní číslo, $\lambda = \omega^2$
Λ	/-/	Ljapunovův exponent
μ	/-/	Poissonova konstanta, koeficient suchého tření
ν	/-/	bezrozměrová rychlost
ν	/kg.m ⁻¹ .s ⁻¹ /	kinematická viskozita tekutiny
ξ, η	/-/	bezrozměrové lokální souřadnice
π	/-/	Ludolfovo číslo; $\pi = 3.14159$
Π		značka pro součin činitelů
ρ	/kg.m ⁻³ /	hustota
σ	/Pa/	tahové napětí
Σ		značka pro součet činitelů
τ	/Pa/	smykové napětí
τ	/t/	časový posun
φ	/rad/	úhel, natočení
Φ	/-/	amplituda bezrozměrového budicího účinku
ω	/s ⁻¹ /	úhlová frekvence
Ω	/s ⁻¹ /	úhlová frekvence vlastních kmitů

Zvláštní označení

$\dot{w} \equiv \partial w / \partial t$	parciální derivace podle času
\vec{w}	vektor (matice) po rozšíření w na dvojnásobnou dimenzi
\hat{w}	odhad, aproximovaná, redukováná hodnota veličiny w
\tilde{w}	vypočtená, výchozí hodnota veličiny w
$\mathbf{W} \setminus$	označení, že čtvercová matice \mathbf{W} je diagonální
$\mathbf{W} \sim$	označení, že matice má vůči \mathbf{W} přemístěné prvky
$Re w + j Im w$	složky komplexního čísla w
w^*	číslo komplexně sdružené k w
$ w $	absolutní hodnota, amplituda komplexního čísla w
$\ \mathbf{w}\ $	Euklidovská norma vektoru \mathbf{w}
\vec{w}	vektor v kartézském souřadném systému
Δw	přírůstek činitele w
$x(t) \xrightarrow{FT} X(f)$	Fourierova transformace originálu $x(t)$ na obraz $X(f)$; $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$
$x(t) \xrightarrow{LT} X(s)$	Laplaceova transformace originálu $x(t)$ na obraz $X(s)$; $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$
$a \hat{=} b$	veličině a je jednoznačně přiřazena veličina b
$a \approx b$	a je zhruba rovno b
$a \gtrsim b$	a je zhruba rovno či větší než b