Obsah

Předmluva 15

1 Matice a soustavy rovnic 17
1.1 Úvod 17
1.2 Základní maticové operace 17
1.2.1 Definice matice 17
1.2.2 Poznámky 17
1.2.3 Rovnost matic 18
1.2.4 Sečítání matic 18
1.2.5 Násobení matice skalárem 18
1.2.6 Poznámky 18
1.2.7 Vlastnosti sečítání matic a násobení matice skalárem 19
1.2.8 Násobení matic 19
1.2.9 Poznámky k maticovému součinu 20
1.2.10 Jednotková matice 20
1.2.11 Vlastnosti součinu matic 20
1.2.12 Nekomutativnost součinu matic 21
1.2.13 Transponovaná matice 22
1.2.14 Vlastnosti transpozice 22
1.2.15 Symetrická matice 22
1.2.16 Vektory 23
1.2.17 Operace s vektory 23
1.2.18 Eukleidovská norma 24
1.2.19 „Metamechanika" maticového součinu 24
1.3 Elementární operace a Gauss(-Jordan)ova eliminace 24
1.3.1 Maticový zápis soustavy rovnic 24
1.3.2 Regularita 25
1.3.3 Elementární operace 25
1.3.4 Třetí elementární operaci lze složit z prvních dvou 26
1.3.5 Maticová reprezentace elementárních operací 26
1.3.6 Maticová reprezentace posloupnosti elementárních operací 27
1.3.7 Elementární operace zachovávají množinu řešení 28
1.3.8 Myšlenka řešení soustavy lineárních rovnic 28
1.3.9 Gaussova eliminace 29
1.3.10 Tvar matice v běžném kroku (na počátku kroku 1) 29
1.3.11 Příklad 29
1.3.12 Gauss-Jordanova eliminace 30

1.3.13 Tvar matice v běžném kroku (na počátku kroku 1) 30
1.3.14 Zastavení algoritmu I 30
1.3.15 Zastavení algoritmu II 31
1.3.16 Soustavy s regulární maticí 32
1.4 Inverzní matice 33
1.4.1 Existence a jednoznačnost inverzní matice 33
1.4.2 Jedna rovnost stačí 33
1.4.3 Případ $n = 2$ 34
1.4.4 Výpočet inverzní matice 34
1.4.5 Algoritmus pro výpočet inverzní matice 35
1.4.6 Příklad 35
1.4.7 Vlastnosti inverzní matice 35
1.4.8 Sherman-Morrisonova formule 36
1.4.9 Důsledek: vliv změny jednoho koeficientu na inverzi 36
1.4.10 Dodatek k soustavám s regulární maticí 36
1.5 Intermezzo 37
1.5.1 Počítače nepočítají přesně 37
1.5.2 Hilbertovy matice 37
1.5.3 Soustavy $H_n x = H_n e$ 37
1.5.4 Řešení soustavy $H_n x = H_n e$ pro $n = 12, 13$ Gaussovou eliminací . . . 37
1.5.5 Řešení soustavy $H_n x = H_n e$ pro $n = 14$ (2 metody) 38
1.5.6 Závěr intermezza 38
1.6 Odstupňovaný tvar a pseudoinverzní matice 38
1.6.1 Co dělat v případě singulární nebo obdélníkové matice? 38
1.6.2 Odstupňovaný tvar matice: definice 38
1.6.3 Odstupňovaný tvar matice: příklad 39
1.6.4 Pomocné tvrzení 39
1.6.5 Algoritmus pro výpočet odstupňovaného tvaru 40
1.6.6 Výsledná matice je v RREF a je jednoznačně určena 40
1.6.7 Lineární nezávislost sloupců resp. řádků matice 41
1.6.8 Lineární nezávislost a regularita 41
1.6.9 Hodnostní rozklad 41
1.6.10 Příklad 42
1.6.11 Moore-Penroseova inverze 42
1.6.12 Algoritmus pro výpočet Moore-Penroseovy inverze 43
1.6.13 Poznámky 43
1.6.14 Grevillův rekurentní vzorec 43
1.6.15 Grevillův algoritmus 45
1.6.16 Příklad 46
1.6.17 Zvláštní případy 46
1.7 Řešení obecných soustav lineárních rovnic 47
1.7.1 Použití RREF tvaru k řešení obecných soustav lineárních rovnic . . . 47
1.7.2 Příklad 48
1.7.3 Homogenní soustavy 48
1.7.4 Tvar množiny řešení 49
1.7.5 Popis množiny řešení 49
1.7.6 Důsledky Penroseovy věty 50
1.8 Metoda nejmenších čtverců 51

1.8.1 Jak řešit soustavy, které řešení nemají? 51
1.8.2 Idea metody nejmenších čtverců 51
1.8.3 Proč „nejmenších čtverců"? 51
1.8.4 Charakterizace řešení 51
1.8.5 Řešitelnost soustavy normálních rovnic 52
1.8.6 Algoritmus metody nejmenších čtverců 53
1.8.7 Důležitý zvláštní případ 53
1.8.8 Zpět k RREF; výhled 54

2 Vektorové prostory 55
2.1 Základní pojmy 55
2.1.1 Definice vektorového prostoru 55
2.1.2 Poznámky 55
2.1.3 Příklady vektorových prostorů 56
2.1.4 Základní vlastnosti vektorového prostoru 56
2.1.5 Podprostory 57
2.1.6 Příklad 57
2.1.7 Systém vektorů 57
2.1.8 Lineární kombinace 57
2.1.9 Lineární obal 58
2.1.10 Inkluze a rovnost lineárních obalů 58
2.2 Systém generátorů a lineární nezávislost 58
2.2.1 Systém generátorů 58
2.2.2 Příklady 59
2.2.3 Co vede k pojmu lineární nezávislosti vektorů 59
2.2.4 Lineární (ne)závislost vektorů 59
2.2.5 Poznámky 59
2.2.6 Redukce lineárně závislého systému generátorů 60
2.2.7 Steinitzova věta o výměně 60
2.3 Báze 62
2.3.1 Báze a její existence 62
2.3.2 Smysl zavedení báze: souřadnice 62
2.3.3 Shrnutí 63
2.4 Dimenze 63
2.4.1 Dimenze vektorového prostoru 63
2.4.2 Příklady 63
2.4.3 Vztah počtu prvků systému k dimenzi 64
2.4.4 Lineárně nezávislý systém lze rozšířit na bázi 64
2.4.5 Dimenze podprostoru 65
2.4.6 Tvar podprostoru 65
2.4.7 Spojení a průnik podprostorů 65
2.4.8 Věta o dimenzi spojení a průniku 66
2.4.9 Direktní součet podprostorů 68
2.4.10 Dimenze direktního součtu 68

3 Vektorové prostory se skalárním součinem 69
3.1 Skalární součin a norma 69
3.1.1 Vektorový prostor se skalárním součinem 69

3.1.2 Důsledky 69
3.1.3 Příklady 69
3.1.4 Norma 70
3.1.5 Ortogonální vektory 70
3.1.6 Cauchy-Schwarzova nerovnost 70
3.1.7 Vlastnosti normy 71
3.1.8 Speciální normy a jejich značení 72
3.2 Ortonormální báze 72
3.2.1 Ortonormální systém 72
3.2.2 Gram-Schmidtův ortogonalizační proces 72
3.2.3 Gram-Schmidtův proces (algoritmus) 73
3.2.4 Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost a Fourierův rozvoj . . 73
3.2.5 Ortonormální báze 74
3.2.6 Existence ortonormální báze 74
3.2.7 Smysl zavedení ortonormální báze: vzorce pro souřadnice 74
3.3 Intermezzo 75
3.3.1 Fourierovy řady 75
3.4 Ortogonální doplněk a ortogonální projekce 75
3.4.1 Ortogonální doplněk 75
3.4.2 Vlastnosti ortogonálního doplňku 76
3.4.3 Ortogonální projekce na podprostor 76
3.4.4 Výpočet ortogonální projekce 76

4 Lineární zobrazení 79
4.1 Základní pojmy a vlastnosti 79
4.1.1 Lineární zobrazení 79
4.1.2 Poznámky 79
4.1.3 Příklady 79
4.1.4 Základní vlastnosti lineárního zobrazení 80
4.1.5 Lineární zobrazení je jednoznačně určeno hodnotami v bázi . . . 80
4.1.6 Souřadnicový vektor 80
4.2 Izomorfismus 81
4.2.1 Definice izomorfismu 81
4.2.2 Všechny n-rozměrné prostory mají „stejnou strukturu" 81
4.2.3 Matice lineárního zobrazení 81
4.2.4 Prostor lineárních zobrazení 82
4.2.5 Prostor lineárních zobrazení je izomorfní prostoru matic 82
4.3 Maticová reprezentace lineárního zobrazení 82
4.3.1 Reprezentace lineárního zobrazení 82
4.3.2 Skládání lineárních zobrazení 83
4.3.3 Složené zobrazení a maticový součin 83
4.3.4 Matice inverzního zobrazení 84
4.4 Změna báze 84
4.5 Adjungovaný operátor 85
4.5.1 Reprezentace lineárních forem 85
4.5.2 Adjungovaný operátor 85

5 Matice 87

5.1 Vektorové a maticové normy . . . 87
5.1.1 Vektorové normy . . . 87
5.1.2 Maticové normy . . . 88
5.2 Hodnost matice . . . 90
5.2.1 Fundamentální podprostory . . . 90
5.2.2 Matice jako reprezentace podprostoru . . . 91
5.2.3 Hodnost matice . . . 91
5.2.4 Hodnostní rozklad, hodnost a báze . . . 91
5.2.5 Výpočet hodnosti a báze . . . 91
5.2.6 Příklad . . . 92
5.2.7 Věta o hodnosti transponované matice . . . 92
5.2.8 Invariantnost hodnosti vůči regulární transformaci . . . 92
5.3 Ortogonální doplněk a ortogonální projekce . . . 93
5.3.1 Ortogonální doplněk a související vlastnosti . . . 93
5.3.2 Výpočet ortogonální projekce na podprostor . . . 93
5.3.3 Speciální případ . . . 94
5.4 Pozitivně (semi)definitní matice a Choleského rozklad . . . 94
5.4.1 Terminologie . . . 94
5.4.2 Pozitivně (semi)definitní matice . . . 94
5.4.3 Rekurentní vlastnost pozitivní definitnosti . . . 95
5.4.4 Choleského rozklad . . . 95
5.4.5 Algoritmus (Choleského rozklad) . . . 96
5.4.6 Příklad . . . 97
5.4.7 Choleského metoda pro řešení $Ax = b$ s pozitivně definitní maticí A . . . 97
5.4.8 Choleského rozklad pro pozitivně semidefinitní matice . . . 97
5.4.9 Energetické normy . . . 97
5.5 Metoda sdružených gradientů . . . 98
5.5.1 Metoda sdružených gradientů: úvod . . . 98
5.5.2 Algoritmus metody sdružených gradientů I . . . 98
5.5.3 Konvergence v konečně mnoha iteracích . . . 99
5.5.4 Optimalita iterací . . . 100
5.5.5 Algoritmus metody sdružených gradientů II . . . 101
5.6 Ortogonální matice . . . 101
5.6.1 Ortogonální matice . . . 101
5.6.2 Ekvivalentní vyjádření . . . 102
5.6.3 Vlastnosti ortogonálních matic . . . 102
5.6.4 Givensovy matice . . . 103
5.6.5 Invariantnost norem vůči ortogonální transformaci . . . 103
5.7 Householderova transformace a její použití . . . 104
5.7.1 Householderova transformace . . . 104
5.7.2 Použití Householderovy transformace I . . . 104
5.7.3 Použití Householderovy transformace II . . . 104
5.7.4 Použití Householderovy transformace III . . . 105
5.8 QR rozklad . . . 105
5.8.1 Obecný QR rozklad . . . 105
5.8.2 Householderův algoritmus pro obecný QR rozklad . . . 106
5.8.3 Příklad . . . 106
5.8.4 QR rozklad matice s lineárně nezávislými sloupci . . . 106

5.8.5 Příklad . . . 107
5.8.6 Použití QR rozkladu k řešení soustav lineárních rovnic . . . 107
5.8.7 Použití QR rozkladu pro metodu nejmenších čtverců . . . 108
5.9 SVD rozklad . . . 108
5.9.1 SVD rozklad: úvod . . . 108
5.9.2 SVD rozklad: formulace . . . 108
5.9.3 Příklad . . . 110
5.9.4 Singulární čísla, jejich jednoznačnost a význam . . . 111
5.9.5 SVD rozklad: pro a proti . . . 112
5.9.6 Odvozené veličiny . . . 112
5.9.7 Použití SVD I: hodnost a ortonormální báze . . . 112
5.9.8 Použití SVD II: (pseudo)inverze a ortogonální projekce . . . 113
5.9.9 Vlastnosti pseudoinverzní matice . . . 114
5.9.10 Použití SVD III: řešení obecných soustav lineárních rovnic . . . 116
5.9.11 Použití SVD IV: polární rozklad . . . 116
5.9.12 SVD faktorizace . . . 117
5.9.13 Použití SVD V: komprese digitálního obrazu . . . 117
5.9.14 Obraz klauna . . . 118
5.9.15 Originál ($k = 200$) . . . 118
5.9.16 $k = 50$ . . . 119
5.9.17 $k = 25$ . . . 119
5.9.18 $k = 12$ . . . 120
5.9.19 $k = 6$ . . . 120
5.9.20 $k = 3$ . . . 121
5.9.21 Slide show: $k = 200, 50, 25, 12, 6, 3$ . . . 121
5.9.22 Použití SVD VI: číslo podmíněnosti . . . 122

6 Determinanty **123**
6.1 Permutace a definice determinantu . . . 123
6.1.1 Úvod . . . 123
6.1.2 Permutace a její znaménko . . . 123
6.1.3 Vliv transpozice na znaménko . . . 123
6.1.4 Definice determinantu . . . 124
6.1.5 Příklady . . . 124
6.2 Vlastnosti determinantu . . . 125
6.2.1 Determinant transponované matice . . . 125
6.2.2 Řádková linearita determinantu . . . 125
6.2.3 Determinant matice se dvěma stejnými řádky . . . 126
6.2.4 Elementární operace a determinant . . . 126
6.2.5 Výpočet determinantu . . . 127
6.2.6 Příklad . . . 127
6.3 Multiplikativnost determinantu . . . 127
6.3.1 Determinant blokově trojúhelníkové matice . . . 127
6.3.2 Multiplikativnost: nejdůležitější vlastnost determinantu . . . 128
6.3.3 Důsledky . . . 129
6.3.4 Kritérium regularity (singularity) . . . 129
6.3.5 Věta Sherman-Morrisonova typu pro determinanty . . . 129
6.4 Laplaceův rozvoj . . . 130

6.4.1 Subdeterminant a algebraický doplněk 130
6.4.2 Laplaceův rozvoj 130
6.4.3 Příklad 131
6.4.4 Důsledek: jiná definice determinantu 131
6.5 Cramerovo pravidlo a vzorec pro inverzní matici 131
6.5.1 Cramerovo pravidlo 131
6.5.2 Adjungovaná matice 132
6.5.3 Vzorec pro inverzní matici 132

7 Vlastní čísla 135

7.1 Definice a základní vlastnosti 135
7.1.1 Definice vlastních čísel 135
7.1.2 Charakterizace vlastních čísel 135
7.1.3 Konečný počet vlastních čísel 135
7.1.4 Příklad 136
7.1.5 Souvislost determinantu s vlastními čísly 136
7.1.6 Vlastní čísla trojúhelníkové matice 136
7.1.7 Vlastní čísla blokově trojúhelníkové matice 137
7.1.8 Podobné matice mají stejná vlastní čísla 137
7.1.9 AB a BA mají stejná vlastní čísla 137
7.1.10 Je-li $AB = BA$, potom A a B mají společný vlastní vektor 138
7.1.11 Cayley-Hamiltonova věta 139
7.1.12 Odhad vlastních čísel pomocí normy 140
7.2 Jordanova normální forma matice 140
7.2.1 Jordanova normální forma: úvod 140
7.2.2 Jordanův blok 141
7.2.3 Jordanova normální forma 141
7.2.4 Jordanova věta o normální formě 141
7.2.5 Zvláštnost Jordanovy normální formy 141
7.2.6 Příklad 142
7.2.7 Jednoznačnost 142
7.2.8 Konstrukce Jordanovy normální formy 142
7.2.9 Nestabilita Jordanovy normální formy 142
7.3 Schurova triangularizační věta 143
7.3.1 Konjugovaná matice 143
7.3.2 Příklady 143
7.3.3 Vlastnosti konjugované matice 143
7.3.4 Unitární matice 144
7.3.5 Schurova triangularizační věta, obecný tvar 144
7.3.6 Simultánní triangularizace 145
7.3.7 Schurova triangularizační věta, reálná forma 146
7.3.8 Příklad 147
7.3.9 Redukce na horní Hessenbergův resp. třídiagonální tvar 148
7.4 Diagonalizovatenost a unitární diagonalizovatelnost 149
7.4.1 Diagonalizovatelnost 149
7.4.2 Unitární diagonalizovatelnost 150
7.5 Hermitovské matice a komplexní SVD rozklad 151
7.5.1 Hermitovské matice 151

7.5.2 Spektrální věta pro hermitovské matice 152
7.5.3 Komplexní SVD rozklad 152
7.6 Vlastní čísla symetrických matic 154
7.6.1 Spektrální věta pro symetrické matice 154
7.6.2 Courant-Fischerova minimaxová věta 154
7.6.3 Wielandt-Hoffmanova věta 156
7.6.4 Výpočet vlastních čísel symetrické matice: úvod 156
7.6.5 Odvození Jacobiho metody 157
7.6.6 Jacobiho metoda 158
7.6.7 Konečnost algoritmu 158
7.6.8 Příklad 159
7.6.9 Pozitivní (semi)definitnost a vlastní čísla 159
7.6.10 Odmocnina z matice 159
7.6.11 Algoritmus pro výpočet k-té odmocniny z matice 160
7.6.12 Sylvesterova věta o setrvačnosti 161
7.7 Vlastní čísla a SVD rozklad 161
7.7.1 Vztah mezi singulárními a vlastními čísly 161
7.7.2 Výpočet SVD rozkladu 162
7.7.3 Algoritmus pro výpočet SVD rozkladu 163
7.8 Vlastní čísla nezáporných matic 163
7.8.1 Spektrální poloměr 163
7.8.2 Matice s $\varrho(A) < 1$ 163
7.8.3 Maticové nerovnosti 163
7.8.4 Perronova věta 164
7.8.5 Příklad 164

8 Lineární programování 165

8.1 Úloha lineárního programování 165
8.1.1 Formulace problému 165
8.1.2 Základní pojmy 165
8.1.3 B-značení 166
8.2 Simplexová metoda 166
8.2.1 Další postup 166
8.2.2 Transformace na tabulkový tvar 166
8.2.3 Tabulka 167
8.2.4 Bázická řešení 167
8.2.5 Příklad 168
8.2.6 Kritérium optimality 168
8.2.7 Kritérium neomezenosti 169
8.2.8 Běžný krok algoritmu 169
8.2.9 Příklad na Blandovo pravidlo 171
8.2.10 Simplexový algoritmus 171
8.2.11 Cyklus 171
8.2.12 Konečnost algoritmu 172
8.2.13 Dvoufázová simplexová metoda: úvod 173
8.2.14 Fáze I 173
8.2.15 Fáze II 174
8.2.16 Tři možnosti ukončení 175

8.2.17 Množina optimálních řešení 175
8.2.18 Parametrický popis množiny optimálních řešení 176
8.2.19 Jednoznačnost optimálního řešení 176
8.2.20 Ukázka výpočtu v MATLABu I (optimální řešení): data 176
8.2.21 Tabulka na začátku fáze I 177
8.2.22 Fáze I 177
8.2.23 Tabulka na začátku fáze II 178
8.2.24 Fáze II 178
8.2.25 Ukázka výpočtu v MATLABu II: nepřípustnost 178
8.2.26 Ukázka výpočtu v MATLABu III: neomezenost 179
8.2.27 Ukázka zacyklení I: výpočet podle Blandova pravidla 180
8.2.28 Ukázka zacyklení II: modifikace Blandova pravidla 181
8.2.29 Dodatek: Vlastnosti bázických řešení 182
8.3 Dualita 183
8.3.1 Primární a duální úloha 183
8.3.2 Slabá věta o dualitě 184
8.3.3 Výpočet duálního optimálního řešení 184
8.3.4 Věta o dualitě 185
8.3.5 Podmínky optimality 186
8.3.6 Farkasova věta 186
8.3.7 Charakterizace neomezenosti 187
8.3.8 Úlohy s nerovnostmi 188
8.3.9 (Slabá) věta o dualitě pro úlohy s nerovnostmi 188
8.3.10 Podmínky optimality pro úlohy s nerovnostmi 188
8.3.11 Dodatek 189
8.4 Aplikace lineárního programování: teorie her 189
8.4.1 Teorie her: základní pojmy 189
8.4.2 Cena hry 190
8.4.3 Existence a výpočet optimálních smíšených strategií 190
8.4.4 Optimální smíšené strategie vždy existují 191