

OBSAH

ODDÍL 1

Gödelova nezapomenutelná práce	15
--------------------------------	----

0 ÚVOD	16
--------	----

0.1 Základní pojmy	18
0.1.1 Formální systémy	18
0.1.2 Jazyk a metajazyk	20
0.1.3 Bezesporné aneb konzistentní teorie	21
0.1.4 Neúplné teorie	21
0.1.5 Nerozhodnutelná tvrzení	23
0.2 Souvislosti mezi Gödelovými větami	24
0.3 Hlavní Gödelova myšlenka	25

1 první část článku	27
----------------------------	-----------

<i>Gödel nahodil motor a má (zatím) zařazený neutrál</i>	27
--	----

1 GÖDELŮV ÚVOD	27
-----------------------	-----------

1.1 Velké formální systémy	27
1.1.1 Formální systémy Gödelovy a také naší doby	28
1.1.2 Gödelovo varování	30
1.2 Naznačení Gödelova důkazu	30
1.2.1 Myšlenka aritmetizace	30
1.2.2 Konstrukce propozice nerozhodnutelné v <i>PM</i>	31
1.2.3 Demonstrace nerozhodnutelnosti propozice $[R(q) ; q]$	33
1.2.4 Pozorování a jedna zásadní metamatematická úvaha	34
1.3 Epistemologické antinomie (též noetické paradoxy)	34
1.3.1 Paradox lháře	35
1.3.2 Russellův paradox	35
1.3.3 Richardův paradox	35
1.3.4 Podstata epistemologických antinomií	37
1.4 Gödelova geniální myšlenka	38
1.5 Charakterizace modelového formálního systému <i>P</i>	38
1.6 Zlatý grál „nerozhodnutelnosti“	40

BEK – technická literatura, Praha 2003

1. vydání

ISBN 978-80-7300-247-3

2 druhá část článku 41

2 POPIS FORMÁLNÍHO SYSTÉMU P 41

2.1 Primitivní znaky systému P 41

2.1.1 Konstanty 41

2.1.2 Proměnné různých typů 42

2.1.3 Gödelova poznámka o relacích a funkcích 42

2.1.4 Metadefinice znaků a formulí 43

2.1.5 Volné a vázané proměnné 44

2.1.6 Další podstatné (meta)definice 46

2.1.7 Základní logické symboly 48

Gödel zařadil první rychlostní stupeň 50

2.2 Axiomy systému P 50

2.2.1 I. skupina – Peanovy axiomy 50

2.2.2 II. skupina – výrokové logické axiomy 51

2.2.3 III. skupina – predikátové logické axiomy 52

2.2.4 IV. skupina – axiom redukovatelnosti 54

2.2.5 V. skupina – axiom extenzionality 55

2.2.6 Bezprostřední důsledek 56

2.2.7 Třída dokazatelných formulí 58

Gödel zařadil druhý rychlostní stupeň 59

3 ARITMETIZACE SYSTÉMU P 59

3.1 Aritmetizace primitivních znaků systému P 59

3.1.1 Aritmetizace konstant 59

3.1.2 Aritmetizace proměnných 59

3.2 Základní věta aritmetiky 61

3.3 Gödelovo číslování 61

3.3.1 Gödelova čísla 61

3.3.2 Aritmetizace formulí 62

3.3.3 Aritmetizace posloupností formulí 64

3.3.4 Dvě poznámky, které nepatří zcela na okraj 65

3.3.5 Princip aritmetizace metateorie formálního systému 65

3.3.6 Závěrečné připomenutí 67

<i>Gödel zařadil třetí rychlostní stupeň</i>		68
4	REKURZIVNÍ FUNKCE A RELACE	68
4.1	Fundamentální definice	68
4.2	Příklady užitečných jednoduchých rekurzivních funkcí a relací	70
4.3	Rekurzivnost základních aritmetických operací	72
5	GÖDELOVY TEORÉMY O REKURZIVNÍCH FUNKCÍCH A RELACÍCH	75
5.1	Teorémy I – III	75
5.1.1	Teorém I	75
5.1.2	Teorém II	76
5.1.3	Teorém III	77
5.2	Teorém IV – nejdůležitější technická věta	78
<i>Gödel zařadil čtvrtý rychlostní stupeň</i>		83
6	GÖDELOVY DEFINICE A JEJICH PŘÍKLADY	83
6.1	Definice 1 – dělitelnost	84
6.2	Definice 2 – prvočísla	85
6.3	Definice 3 – prvočísla rozkladu	85
6.4	Definice 4 – faktoriál	87
6.5	Definice 5 – posloupnost všech prvočísel	87
6.6	Definice 6 – termy, výrazy	88
6.7	Definice 7 – délka posloupnosti	89
6.8	Definice 8 – zřetězení posloupností	89
6.9	Definice 9 – jednočlenná posloupnost	91
6.10	Definice 10 – uzávorkování	91
6.11	Definice 11 – proměnná určitého typu	92
6.12	Definice 12 – proměnná	92
6.13	Definice 13 – negace	93
6.14	Definice 14 – disjunkce	93
6.15	Definice 15 – generalizace	94
6.16	Definice 16 – vkládání znaků následníka	94
6.17	Definice 17 – numerály	95
6.18	Definice 18 – znaky typu 1	96

6.19	Definice 19 – znaky libovolného typu	97
6.20	Definice 20 – elementární formule	98
6.21	Definice 21 – pomocná operace	98
6.22	Definice 22 – speciální posloupnost formulí	99
6.23	Definice 23 – formule	100
6.24	Definice 24 – vázaná proměnná	101
6.25	Definice 25 – volná proměnná	102
6.26	Definice 26 – volné proměnné	102
6.27	Definice 27 – „mechanická“ substituce	104
6.28	Definice 28 – pomocná funkce	105
6.29	Definice 29 – technický pojem	106
6.30	Definice 30 – pomocný pojem	107
6.31	Definice 31 – přípustná substituce	108
6.32	Definice 32 – ostatní logické pojmy	110
6.33	Definice 33 – elevace typů	111
6.34	Definice 34 – Peanův axiom	113
6.35	Definice 35 – výrokové logické axiomy	114
6.36	Definice 36 – výrokový axiom	115
6.37	Definice 37 – důležitá technická relace	116
6.38	Definice 38 – první predikátový axiom	117
6.39	Definice 39 – druhý predikátový axiom	119
6.40	Definice 40 – axiom redukovatelnosti	120
6.41	Definice 41 – axiom extenzionality	121
6.42	Definice 42 – axiom systému P	122
6.43	Definice 43 – bezprostřední důsledek	123
6.44	Definice 44 – důkazová figura	124
6.45	Definice 45 – důkaz v systému P	125
6.46	Definice 46 – dokazatelná formule	126
6.47	Závěr kapitoly	127

7 FORMALIZACE REKURZIVNOSTI V RÁMCI SAMOTNÉHO SYSTÉMU P 128

7.1	Teorém V	128
7.2	Několik závěrečných úvah o Teorému V	132

Gödel zařadil poslední rychlostní stupeň		135
8	CÍL DISKUZE PODLE AUTORA	135
8.1	Konzistence a ω-konzistence	135
8.1.1	Množina důsledků třídy FORMULÍ	135
8.1.2	Dva druhy konzistence třídy FORMULÍ	136
8.1.3	Vztah mezi konzistencí a ω -konzistencí	137
8.1.4	Rekurzivní třída FORMULÍ	139
8.2	Teorém VI – nejdůležitější věta Gödelova článku	139
8.2.1	Formulace Teorému VI	139
8.2.2	Důkaz Teorému VI	140
8.3	Gödelova intuicionistická vsuvka o konstruktivnosti Teorému VI	145
8.4	Definitivní zobecnění teorému J. B. Rosserem	147
9	ROZHODNUTELNOST A JEJÍ DŮSLEDKY	149
9.1	Rozhodnutelné relace a zvláště pak třídy	149
9.2	Zobecnění Teorému VI pro rozhodnutelné třídy FORMULÍ	149
10	GÖDELOVY DALŠÍ NÁMĚTY A POZNÁMKY	152
10.1	Konzistence versus protipříklady	152
10.2	Důsledky rozšíření třídy axiomů systému P	153
10.3	Gödelovy úvahy o základních problémech teorie množin (TM)	155
10.3.1	Jedna speciální třída FORMULÍ	155
10.3.2	Vsuvka o axiomu výběru, (zobecněné) hypotéze kontinua a jejich důsledcích pro nerozhodnutelnost	156
10.4	Poznámka o nerekurzivnosti vztahu dokazatelnosti	159
10.5	Gödelovo neformální metatvrzení	159
3	třetí část článku	163
11	NĚKTERÉ DŮSLEDKY TEORÉMU VI	163
11.1	Aritmetické relace	163
11.1.1	Definice aritmetických relací a tříd	163
11.1.2	Čínská věta o zbytcích a její důsledek – Teorém VII	164
11.1.3	Důkaz Teorému VII	165
11.1.4	Teorém VIII	168
11.2	Omezený funkční kalkul (počet) – o.f.k.	169
11.2.1	Vymezení základních pojmů o.f.k.	169

11.2.2	Pravdivost a splnitelnost formulí	170
11.2.3	Teorémy IX a X	172
12	DVA ZÁSADNÍ PROBLÉMY TEORIE ČÍSEL	177
12.1	Goldbachova hypotéza	177
12.2	Velká Fermatova věta	179
4	čtvrtá část článku	181
13	NEDOKAZATELNOST BEZESPORNOSTI	181
13.1	Teorém XI – druhá nejdůležitější věta Gödelova článku	181
13.1.1	Teorém XI a jeho demonstrace	181
13.1.2	Několik komentářů k demonstraci Teorému XI	185
13.1.3	Závěrečné znepokojivé pozorování	188
13.2	Gödelovy poznámky k Teorému XI	189
13.3	Co je aritmetizací Zlatého grálu v „teorii nerozhodnutelnosti“?	191
14	GÖDELOVY ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY	194
14.1	Poznámka doplněná 28. srpna 1963	194
14.2	Poznámka pod čarou	195
NÁŠ ZÁVĚR K I. ODDÍLU		195

ODDÍL 2

Některé pozoruhodné souvislosti

s Gödelovými výsledky 199

15 ÚVOD KE II. ODDÍLU 200

16 PROBLÉMY POČÍTAČOVÝCH DŮKAZŮ 200

16.1 Bremermannova mez a Shannonova míra informace 200

16.2 Počítačové důkazy a jejich souvislost
s Bremermannovou mezí 203

16.2.1 Problém čtyř barev
 204 |

16.2.2 Slabá Goldbachova hypotéza
 206 |

16.3 **A jaké jsou závěry?**
 207 |

16.3.1 Vyhledky Goldbachovy hypotézy
 207 |

16.3.2 Ukázka „běžné“ velikosti Gödelových čísel
 208 |

F. Včelař, J. Frýdek, I. Zelinka: Gödel 1931 9

17	TURINGOVY STROJE A GÖDELOVA ČÍSLA	212
17.1	Turingův stroj, Gödel a Entscheidungsproblem	212
17.2	Turingovy stroje a Gödel v prostředí MATHEMATICA	219
17.3	Fyzikální „analogie“ Teorému XI	225
18	KURT FRIEDRICH GÖDEL, JEHO ŽIVOT A DÍLO	227
19	HEGELOVSKO-GÖDELOVSKÁ PARALELA	234
20	EUKLEIDOVY ZÁKLADY	236
21	NĚKOLIK SOUVISLOSTÍ S AXIOMEM VÝBĚRU	241
22	PÁR SLOV O DALŠÍCH VLASTNOSTECH FORMÁLNÍCH TEORIÍ	250
	Pravdivost a dokazatelnost	250
	Abstraktní věta o neúplnosti pro korektní systémy	251
	„Bohaté“ a „chudé“ systémy	254
	Dvě věty nerozhodnutelné v Peanově aritmetice	256
	POHLED JEDNOHO Z RECENZENTŮ NA NĚKTERÁ PŘÍBUZNÁ TÉMATA	259
	Připomínky pana Aleše Gottvalda	259
	Nerozhodnuto navěky?	259
	ZÁVĚR	261
	SEZNAM DOPORUČENÉ A POUŽITÉ LITERATURY	265
	SEZNAM POUŽITÝCH ZNAKŮ, SYMBOLŮ A ZKRATEK	266
	REJSTŘÍK	274
	Kontakty na prodejny technické literatury	279
	Pár slov o nakladatelství	280