

Obsah

Předmluva	5
Autorská předmluva	7
Kapitola I: Uspořádané množiny	15
I.1 – Relace	15
I.1.1 – Unární relace	15
I.1.2 – Binární relace	15
I.1.3 – Operace s binárními relacemi	17
I.1.4 – Vlastnosti binárních relací na množině	20
I.1.5 – Preuspořádání	23
I.1.6 – Symetrické preuspořádání. Relace ekvivalence	24
I.1.7 – Nesymetrické preuspořádání. Antisymetrické preuspořádání, relace uspořádání	28
I.1.8 – Uspořádání na množině. Úplné uspořádání	29
I.1.9 – Uspořádání, striktní uspořádání	30
I.1.10 – Další definice. Hasseův diagram	31
I.2 – Speciální prvky uspořádané množiny	32
I.2.1 – Definice	32
I.2.2 – Vlastnosti, příklady	33
I.3 – Podmínky řetězců	37
I.3.1 – Řetězce	37
I.3.2 – Jordanova – Dedekindova podmínka	38
I.3.3 – Podmínky klesajících a rostoucích řetězců	38
I.4 – Ekvivalentnost axiomů výběru, Zermelova a Zornova axiomu	39
I.4.1 – Dobře uspořádané množiny	39
I.4.2 – Studium K -řetězců	41
I.4.3 – Zornův axiom, Zermelův axiom a axiom výběru	42
I.5 – Morfismy uspořádaných množin	42
I.5.1 – Funkcionální relace, zobrazení, funkce	42
I.5.2 – Morfismy. Epimorfismy. Monomorfismy. Endomorfismy. Automorfismy	45

I.6 – Součty a součiny uspořádaných množin	48
I.6.1 – Direktní součty	48
I.6.2 – Direktní součiny	49
I.6.3 – Direktní mocniny	50
I.6.4 – Ordinální součty	50
I.6.5 – Ordinální součiny	51
I.6.6 – Ordinální mocniny	51
Problémy ke kapitole I.	51
Kapitola II: Polosvazy a svazy	57
II.1 – Definice a vlastnosti	57
II.1.1 – Polosvazy, spojový a průsekový polosvaz	57
II.1.2 – Svazy	60
II.2 – Podpolosvazy, podsvazy	62
II.2.1 – Podpolosvazy: spojový podpolosvaz, průsekový podpolosvaz	62
II.2.2 – Podsvaz	62
II.3 – Epimorfismy a izomorfismy polosvazů a svazů	63
II.3.1 – Spojové a průsekové epimorfismy polosvazů	63
II.3.2 – Epimorfismy. Endomorfismy. Izomorfismy. Automorfismy svazů	64
II.3.3 – Duální svazy	65
II.4 – Komplementace ve svazu	66
II.4.1 – Komplementární svazy	66
II.4.2 – Relativně komplementární svazy	67
II.4.3 – Pseudokomplementární svazy	67
II.4.4 – Svazy relativně pseudokomplementární	68
II.4.5 – Ortokomplementární svazy	68
II.5 – Ideály a filtry polosvazů a svazů	69
II.5.1 – Ideály a filtry v polosvazu	69
II.5.2 – Ideály a filtry ve svazu	71
II.5.3 – Prvoideály. Ultrafiltry	73
II.5.4 – Uzavřené ideály a filtry	74
II.6 – Volné svazy s α generátory	74
II.6.1 – Definice	74
II.6.2 – Základní věty	75
II.7 – Polosvazy a úplné svazy	76
II.7.1 – Předběžné definice	76
II.7.2 – Úplné polosvazy	77
II.7.3 – Úplné svazy	77
II.7.4 – Uzávěrová zobrazení	80
II.7.5 – Mooreovy rodiny	81
II.7.6 – Binární relace a uzávěrová zobrazení	84
II.7.7 – Galoisova korespondence	87
II.7.8 – MacNeilleova věta	87
II.8 – Součty a součiny polosvazů a svazů	88
Problém ke kapitole II	88
Kapitola III: Semimodulární svazy. Modulární svazy a distributivní svazy	89
III.1 – Semimodulární svazy	90

III.1.1 – Definice a vlastnosti	90
III.1.2 – Komplementární semimodulární svaz	93
III.2 – Modulární svazy	95
III.2.1 – Definice a vlastnosti	95
III.2.2 – Modulární svazy a semimodulární svazy	98
III.2.3 – Volný modulární svaz se třemi generátory	100
III.2.4 – Komplementární modulární svazy	100
III.3 – Distributivní svazy	102
III.3.1 – Definice a vlastnosti	102
III.3.2 – Obecné zákony distributivity	109
III.3.3 – Volné distributivní svazy	109
III.3.4 – Komplementace v distributivních svazech	111
III.3.5 – Ideály a filtry v distributivním svazu	112
III.3.6 – Pseudokomplementární distributivní svazy	114
III.3.7 – Stoneovy svazy	115
III.4 – Relace kongruence ve svazu	120
Problémy ke kapitole III	124
Kapitola IV: Booleovy algebry (Axiomatické studium)	129
IV.1 – Booleovy algebry, definice a vlastnosti	129
IV.1.1 – Definice	129
IV.1.2 – Věty o komplementaci v Booleově algebře	131
IV.1.3 – Další operace definované v Booleově algebře	136
IV.2 – Booleova algebra a booleovský okruh	136
IV.2.1 – Charakteristická funkce	136
IV.2.2 – Booleovské okruhy	137
IV.3 – Systémy postulátů	146
IV.3.1 – Newmanovy axiomy	146
IV.3.2 – Systémy axiómů G. Walusinského	153
IV.3.3 – Systém axiómů Sikorského	156
Kapitola V: Booleovy algebry (Obecné studium)	160
V.1 – Úplné Booleovy algebry	160
V.1.1 – Definice	160
V.1.2 – Vlastnosti	161
V.1.3 – Spočetné množiny v nekonečných Booleových algebrách	163
V.1.4 – Podmínky spočetných řetězců	164
V.2 – Atomické Booleovy algebry	166
V.2.1 – Definice	166
V.2.2 – Vlastnosti	167
V.3 – Podalgebry Booleovy algebry	168
V.3.1 – Definice a vlastnosti	168
V.3.2 – Podalgebry generované množinou	169
V.3.3 – Svaz podalgeber Booleovy algebry B	169
V.3.4 – Podalgebry, které jsou α -úplné, σ -úplné, úplné	170
V.3.5 – Podalgebry, které jsou α -regulární, σ -regulární, regulární	170
V.4 – Morfismy Booleovy algebry	171
V.4.1 – Definice a vlastnosti	171

V.4.2 – Morfismy, které jsou α -úplné a úplné	175
V.4.3 – Rozšíření zobrazení na booleovské morfismy	176
V.4.4 – Nezávislé podalgebry	178
V.4.5 – Booleovské součiny	178
V.4.6 – Volné Booleovy algebry	179
V.5 – Direktní součty a součiny Booleových algeber	180
V.6 – Booleovské funkce	181
V.6.1 – Jednoduché booleovské funkce	181
V.6.2 – Booleovské funkce	184
V.7 – Ideály a filtry Booleových algeber	184
V.7.1 – Definice a vlastnosti	184
V.7.2 – Kongruence, morfismy, ideály a filtry	188
V.7.3 – Ideály a filtry, které jsou α -úplné, σ -úplné, úplné	197
V.7.4 – Prvoideály a ultrafiltry	197
V.7.5 – Stoneovy rodiny ideálů a filtrů	202
V.7.6 – Uzavřené ideály a filtry, husté ideály a filtry	204
Problém ke kapitole V	205
Kapitola VI: Reprezentace	209
VI.1 – Množinové tělesa	209
VI.1.1 – Definice množinového tělesa	209
VI.1.2 – Redukované množinové tělesa	210
VI.1.3 – Perfektní množinové tělesa	211
VI.1.4 – Booleův prostor	213
VI.1.5 – Indukované morfismy mezi množinovými tělesy	213
VI.2 – Množinová reprezentace Booleovy algebry	214
VI.2.1 – Definice	214
VI.2.2 – Reprezentace redukovaným tělesem	214
VI.2.3 – Perfektní reprezentace	216
VI.3 – Topologická reprezentace Booleovy algebry	217
VI.3.1 – Perfektní reprezentace	217
VI.3.2 – Stoneovy prostory	219
VI.3.3 – Topologická reprezentace ideálů a filtrů Booleovy algebry	223
VI.3.4 – Topologická reprezentace epimorfních obrazů Booleovy algebry	225
VI.3.5 – Topologická reprezentace podalgeber Booleovy algebry B	229
VI.3.6 – Korespondence mezi morfismy Booleových algeber a spojitými zobrazeními Booleových prostorů	232
VI.3.7 – Retrakty	233
VI.3.8 – Extrémně nespojitě prostory a úplné Booleovy algebry	234
VI.3.9 – Topologická reprezentace redukovaným tělesem	235
VI.4 – Reprezentace α -úplné (úplné) Booleovy algebry α -úplným (úplným) tělesem	236
VI.4.1 – Reprezentace α -úplné Booleovy algebry α -úplným tělesem	236
VI.4.2 – Reprezentace úplné Booleovy algebry úplným množinovým tělesem	237
VI.4.3 – Loomisova – Sikorského věta	238
Problémy ke kapitole VI	239
Kapitola VII: Aplikace	241
VII.1 – Aplikace na teorii míry: Míry a Booleovy algebry	241

VII.1.1 – Konečně aditivní míry	241
VII.1.2 – Míry, které jsou σ -aditivní	245
VII.1.3 – Aplikace na teorii míry	248
VII.2 – Aplikace na počet pravděpodobnosti	249
VII.2.1 – Jevy a pravděpodobnosti	249
VII.2.2 – Měřitelné funkce a náhodné proměnné	249
VII.3 – Aplikace na matematickou logiku	250
VII.3.1 – Výroková logika	250
VII.3.2 – Funkcionální logika neboli logika predikátů	251
Dodatek z topologie	252
Literatura	255
Rejstřík	258