

# Obsah

<b>11 Metrické prostory aneb jak měříme vzdálenost</b>	<b>1</b>
11.1 Co je to metrika?	1
11.1.1 Vzdálenost v $\mathbf{R}^n$ aneb Euklides nejezdil taxíkem	1
11.1.2 Podmnožiny metrických prostorů	4
11.1.3 Metrika a topologie aneb koule mohou být i hranaté	6
11.1.4 I funkce si mohou být více či méně blízké	9
11.1.5 Skalární součin a měření vzdálenosti	11
11.1.6 Neobvyklé i obvyklejší metriky	17
11.1.7 Cvičení	21
11.2 Konvergence aneb přibližování	26
11.2.1 Konvergentní a cauchyovská posloupnost	26
11.2.2 Topologické pojmy očima metriky	32
11.2.3 Úplné a neúplné metrické prostory	34
11.2.4 Čím zaplnit „mezery“ aneb zúplnění metrického prostoru	39
11.2.5 Cvičení	42
11.3 Zobrazení metrických prostorů	44
11.3.1 Spojitá a izometrická zobrazení	44
11.3.2 Kontrakce a Banachův princip pevného bodu	48
11.3.3 Cvičení	56
<b>12 Integrace všeho druhu přinese nám ducha vzpruhu</b>	<b>59</b>
12.1 Vícerozměrné integrování	60
12.1.1 Objem pod grafem vyzděný kvádříky	60
12.1.2 Uzavřené kvádry v $\mathbf{R}^n$ - základní a nejjednodušší integrační obory	67
12.1.3 Pokrývání množin a zanedbatelné množiny	70
12.1.4 Spojitost funkce trochu jinak	74
12.1.5 Integrál z funkce $n$ proměnných na uzavřeném $n$ -rozměrném kvádru aneb hranaté integrování	79
12.1.6 Fubiniova věta aneb pro praktické integrování stačí umět jednonásobný integrál	88

12.1.7	První zobecnění integrálu: integrování na obecnějších $n$ -rozměrných útva- rech v $\mathbf{R}^n$ aneb šišaté integrování . . . . .	92
12.1.8	Věta o transformaci integrálu . . . . .	100
12.1.9	Aplikace: geometrické a fyzikální charakteristiky rovinných a prostoro- vých útvarů . . . . .	118
12.1.10	„Dluhy“ z předchozích dílů . . . . .	124
12.1.11	Přídavek: druhé zobecnění integrálu . . . . .	131
12.1.12	Několik slov a vět o nevlastních integrálech . . . . .	153
12.1.13	Cvičení . . . . .	156
12.2	A zase algebra, tentokrát tenzorová . . . . .	163
12.2.1	Tenzory nejsou nic jiného než lineární zobrazení více proměnných . . . . .	164
12.2.2	. . . a tvoří vektorové prostory . . . . .	170
12.2.3	Tenzory se dají i násobit, samozřejmě tenzorově . . . . .	183
12.2.4	Symetrické a antisymetrické tenzory, vnější součin . . . . .	187
12.2.5	Úžení, stopy, zvedání a snižování indexů . . . . .	207
12.2.6	Antisymetrické kovariantní tenzory aneb co potřebujeme pro integrování . . . . .	214
12.2.7	Objemový element v prostoru $E_n$ , vektorový součin . . . . .	223
12.2.8	Cvičení . . . . .	228
12.3	Od algebry k analýze: tenzorová pole a diferenciální formy v $\mathbf{R}^n$ . . . . .	230
12.3.1	Od vektorových polí v $\mathbf{R}^n$ k tenzorovým, diferenciální formy . . . . .	230
12.3.2	Operace s diferenciálními formami — součty, násobky, součiny, úžení . . . . .	235
12.3.3	Derivování diferenciálních forem — vnější derivace . . . . .	239
12.3.4	Zpětný obraz (pullback) diferenciálních forem čili „stáhni zpět“ . . . . .	245
12.3.5	Derivování diferenciálních forem — Lieova derivace . . . . .	261
12.3.6	Trocha počítání pro fyziku — vektorové identity pomocí forem . . . . .	271
12.3.7	Cvičení . . . . .	273
12.4	Integrál z diferenciálních forem . . . . .	278
12.4.1	Integrační obory hranaté i šišaté, placaté i křivé — singulární krychle a řetězce v $\mathbf{R}^n$ , křivky, plochy a objemy v $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ . . . . .	279
12.4.2	Stěny a hranice (okraje) singulárních krychlí a řetězců . . . . .	286
12.4.3	Integrál diferenciální $n$ -formy na $n$ -rozměrné singulární krychli, integrály druhého druhu . . . . .	293
12.4.4	Obecný Stokesův teorém — základ integrálních vět . . . . .	308
12.4.5	Objemové elementy a integrály prvního druhu . . . . .	319
12.4.6	Klasické integrální věty v aparátu forem a fyzikální aplikace . . . . .	332
12.4.7	Cvičení . . . . .	350
<b>13</b>	<b>Proměnná je komplexní — výsledky jsou noblesní</b> . . . . .	<b>367</b>
13.1	Co je to komplexní funkce komplexní proměnné? . . . . .	369
13.1.1	Gaussova rovina, bod nekonečno, okolí bodů, číselné posloupnosti a řady . . . . .	369

13.1.2	Co je to funkce komplexní proměnné? . . . . .	379
13.1.3	Limity, spojitost, posloupnosti a řady funkcí komplexní proměnné . . . . .	384
13.1.4	Diferenciální 1-formy v komplexním oboru a křivkový integrál . . . . .	395
13.1.5	Cvičení . . . . .	403
13.2	Má-li funkce komplexní proměnné derivaci, pak má derivace všech řádů . . . . .	405
13.2.1	Holomorfní funkce — funkce s derivací . . . . .	405
13.2.2	Regulární funkce — funkce s Taylorovou řadou . . . . .	417
13.2.3	Holomorfní funkce, uzavřená křivka a nulový integrál . . . . .	424
13.2.4	Holomorfní a regulární jsou synonyma! . . . . .	433
13.2.5	Věta o jednoznačnosti, holomorfní rozšíření, elementární funkce . . . . .	437
13.2.6	Cvičení . . . . .	447
13.3	Co udělá malá dírka v oboru holomorfnosti aneb singularity . . . . .	449
13.3.1	Co jsou to singularity funkcí a jak je třídíme? . . . . .	449
13.3.2	Singularity a dosud neobvyklý rozvoj funkce, reziduum . . . . .	460
13.3.3	Reziduová věta aneb místo integrování sčítáme rezidua . . . . .	473
13.3.4	Reziduová věta — účinný nástroj pro výpočet reálných integrálů . . . . .	483
13.3.5	Cvičení . . . . .	495
13.4	Co jsou to mnohoznačné funkce . . . . .	498
13.4.1	Prodloužení holomorfní funkce podél křivek — možné výsledky . . . . .	499
13.4.2	Logaritmus jako základ mnohoznačných funkcí . . . . .	505
13.4.3	Další mnohoznačné funkce . . . . .	507
13.4.4	Mnohoznačné funkce a integrál, fyzikální aplikace . . . . .	512
13.4.5	Cvičení . . . . .	518
13.5	Laplaceova a Fourierova transformace . . . . .	519
13.5.1	Jednostranná Laplaceova transformace . . . . .	521
13.5.2	Laplaceův obraz, jeho pozoruhodné vlastnosti a výhodné použití . . . . .	523
13.5.3	Dvoustranná a vícerozměrná Laplaceova transformace, Fourierova transformace . . . . .	535
13.5.4	Konvoluce a její Laplaceův obraz . . . . .	543
13.5.5	Cvičení . . . . .	545
13.6	Funkce komplexní proměnné a fyzika . . . . .	547
13.6.1	Podnět, odezva a příčinnost . . . . .	548
13.6.2	Odezva látky na světlo a vliv příčinnosti aneb krásná fyzika . . . . .	550
13.6.3	Něco málo o konformních zobrazeních . . . . .	554
13.6.4	Cvičení . . . . .	573
<b>14</b>	<b>Variační počet teď již doopravdy: mechanika a teorie pole</b> . . . . .	<b>575</b>
14.1	Geometrické struktury pro variační počet . . . . .	577
14.1.1	Informativní minimum o diferencovatelných varietách . . . . .	578
14.1.2	„Vrstevnaté“ euklidovské prostory . . . . .	589

14.1.3	Soustavy souřadnic přizpůsobené vrstvení, řezy a jejich prodloužení . . .	592
14.1.4	Zobrazení přizpůsobená vrstvení . . . . .	605
14.1.5	Vektorová pole přizpůsobená vrstvení . . . . .	612
14.1.6	Diferenciální formy přizpůsobené vrstvení . . . . .	628
14.1.7	Cvičení . . . . .	651
14.2	Variační problém na vrstevnatých prostorech: lagrangeovská formulace . . . .	657
14.2.1	Variační problém prvního a vyššího řádu . . . . .	657
14.2.2	První variační formule, Lepageovy formy a ekvivalenty . . . . .	664
14.2.3	Extremály Lagrangeových struktur . . . . .	682
14.2.4	Triviální variační problém, variačnost rovnic . . . . .	686
14.2.5	Symetrie a zákony zachování . . . . .	712
14.2.6	Cvičení . . . . .	717
14.3	Variační problém na vrstevnatých prostorech: hamiltonovská formulace . . . .	721
14.3.1	Regulární variační problém a Hamiltonovy rovnice prvního řádu . . . .	721
14.3.2	Regulární variační problém a Hamiltonova teorie vyššího řádu . . . .	727
14.3.3	Některé „singulární“ variační problémy jsou regulární — nová regularita	741
14.3.4	Hamiltonovská teorie ve světle nové definice regularity . . . . .	751
14.3.5	Hamiltonova-Jacobiho teorie: „poznámka“ . . . . .	759
14.3.6	Cvičení . . . . .	771
14.4	Variační fyzika . . . . .	773
14.4.1	Mechanika a speciální relativita . . . . .	773
14.4.2	Mechanika spojitých prostředí . . . . .	782
14.4.3	Klasická elektrodynamika . . . . .	783
14.4.4	Kvantová mechanika . . . . .	788
14.4.5	Poznámka ke strunovým teoriím . . . . .	791
14.4.6	Cvičení . . . . .	794
<b>15</b>	<b>Kdy pomůže počítač aneb některé základní numerické metody</b>	<b>799</b>
15.1	Počítání s nepřesnými čísly . . . . .	800
15.1.1	Zaokrouhlování . . . . .	804
15.1.2	Chyby aritmetických operací a funkčních hodnot . . . . .	807
15.1.3	Cvičení . . . . .	811
15.2	Numerické metody algebry . . . . .	811
15.2.1	Řešení soustav lineárních rovnic a inverze matic . . . . .	811
15.2.2	Řešení nelineárních rovnic . . . . .	840
15.2.3	Vlastní hodnoty a vlastní vektory . . . . .	860
15.2.4	Cvičení . . . . .	866
15.3	Numerické metody diferenciálního a integrálního počtu . . . . .	869
15.3.1	Aproximace funkcí . . . . .	870
15.3.2	Numerické derivování . . . . .	905

15.3.3	Numerické integrování . . . . .	911
15.3.4	Cvičení . . . . .	937
15.4	Příklady numerického řešení diferenciálních rovnic . . . . .	942
15.4.1	Rungeova-Kuttova metoda . . . . .	942
15.4.2	Metoda konečných prvků . . . . .	949
<b>16</b>	<b>Lineární algebra počtvrté — hrátky s operátory a maticemi</b>	<b>961</b>
16.1	Co dělat, když operátor nemá diagonální reprezentaci . . . . .	961
16.1.1	Podobnost matic a Jordanovy matice . . . . .	962
16.1.2	Invariantní podprostory a nilpotentní zobrazení . . . . .	967
16.1.3	Co je to kořenový vektor a kořenový prostor . . . . .	973
16.1.4	Řetízky z rovnic a Jordanův normální tvar . . . . .	985
16.1.5	Jak nalézt podobnostní transformaci prakticky . . . . .	991
16.1.6	Cvičení . . . . .	998
16.2	Polynomické matice a maticové polynomy . . . . .	1001
16.2.1	Ekvivalence polynomických matic . . . . .	1002
16.2.2	Kanonický tvar polynomické matice . . . . .	1008
16.2.3	Chvilka s maticovými polynomy . . . . .	1011
16.2.4	Jak poznat podobné matice a najít podobnostní transformaci . . . . .	1014
16.2.5	Jordanův normální tvar matice . . . . .	1019
16.2.6	Cvičení . . . . .	1023
16.3	Několik aplikací . . . . .	1028
16.3.1	Exponenciála matice . . . . .	1028
16.3.2	Matice a soustavy diferenciálních rovnic . . . . .	1036
16.3.3	Ještě něco navíc . . . . .	1041
16.3.4	Cvičení . . . . .	1052

Literatura

Rejstřík