

# Obsah

<b>I</b>	<b>Zimní semestr</b>	<b>13</b>
<b>1</b>	<b>První seznámení s předmětem</b>	<b>15</b>
1.1	Gaussova eliminace . . . . .	15
1.2	Řešení soustav rovnic a objemy těles . . . . .	18
1.3	Výpočet objemu pravidelného dvacetistěnu . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Kdo je grupa a těleso</b>	<b>27</b>
2.1	Grupa . . . . .	27
2.2	Permutace . . . . .	31
2.3	Řešil vy byste rovnici pátého stupně? . . . . .	35
2.4	Nehmotná tělesa . . . . .	38
2.5	Cayleyova čísla . . . . .	40
2.6	Trisekce úhlu pravítkem a kružítkem . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Prostory plné vektorů</b>	<b>45</b>
3.1	Lineární nezávislost . . . . .	47
3.2	Steinitzova věta . . . . .	51
3.3	Funkce typu spline . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Skalární součin</b>	<b>59</b>
4.1	Gramm-Schmidtova ortogonalisace . . . . .	65
4.2	Ortogonální doplněk . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Matice a lineární zobrazení</b>	<b>69</b>
5.1	Některé další význačné příklady matic . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Hodnost</b>	<b>77</b>
6.1	Hodnost součinu, regulární matice . . . . .	80
6.2	Ekvivalentní řádkové úpravy . . . . .	82

6.3	Frobeniova věta, řešitelnost soustavy . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Operátory v různých basích, stopa</b>	<b>89</b>
7.1	Podobné matice, matice v různých basích . . . . .	89
7.2	Stopa . . . . .	91
<b>8</b>	<b>Determinant</b>	<b>93</b>
8.1	Základní vlastnosti determinantů . . . . .	98
8.2	Výpočet cirkulantu . . . . .	104
8.3	Rozvoj determinantu podle sloupce . . . . .	105
8.4	Cramerovo pravidlo, řešení soustavy . . . . .	107
<b>9</b>	<b>Vlastní čísla a vektory operátoru</b>	<b>109</b>
9.1	Charakterisace isometrií ve třech rozměrech . . . . .	112
9.2	Přehled grup, Cartaniáda . . . . .	113
<b>II</b>	<b>Letní semestr</b>	<b>119</b>
<b>10</b>	<b>Dláždění a krystaly</b>	<b>121</b>
10.1	Penroseho pokrytí . . . . .	124
10.2	Příklad třírozměrného kvasikrystalu . . . . .	128
<b>11</b>	<b>Exponenciála matice</b>	<b>131</b>
11.1	Aplikace na soustavu diferenciálních rovnic . . . . .	137
11.2	Heisenbergův obraz . . . . .	137
11.3	Vztah stopy a determinantu . . . . .	139
11.4	Taylorův vzorec . . . . .	141
11.5	Poissonovo rozdělení . . . . .	142
11.6	Gaussova křivka . . . . .	144
11.7	Logaritmus matice . . . . .	145
11.8	Hamiltonovy rovnice pro oscilátor . . . . .	146
<b>12</b>	<b>Lieova algebra</b>	<b>149</b>
12.1	Killingova forma a metrika . . . . .	153
12.2	Teorie representací . . . . .	154
12.3	Kompaktní grupy . . . . .	161
12.4	Váhy a mřížky . . . . .	168
12.5	Superalgebry a supersymetrie . . . . .	170
12.6	Obří vyňatá grupa . . . . .	172

<b>13 Nilpotence, Jordanův tvar</b>	<b>179</b>
13.1 Base z řetězců vektorů . . . . .	182
13.2 Jordanův tvar obecné matice . . . . .	186
13.3 Polynomy a funkce matic . . . . .	193
<b>14 Positivní matice</b>	<b>201</b>
14.1 Perron-Frobeniova věta . . . . .	202
14.2 Feynmanův integrál . . . . .	207
<b>15 Dualita</b>	<b>217</b>
15.1 Duální grupa . . . . .	217
15.2 Duální grafy a tělesa . . . . .	218
15.3 Dualita v geometrii . . . . .	220
15.4 Duální prostory . . . . .	221
15.5 Dualita a skalární součin . . . . .	225
15.6 Dualita ve funkcionální analýze . . . . .	229
<b>16 Spektrální rozklad, adjunkce</b>	<b>235</b>
16.1 Kvantová mechanika . . . . .	238
16.2 Prostor Fourierových řad . . . . .	241
16.3 Kvantový harmonický oscilátor . . . . .	242
16.4 Hermitovy polynomy . . . . .	244
16.5 Legendreovy polynomy . . . . .	246
16.6 Čebyševovy, Laguerrovy a další polynomy . . . . .	251
16.7 Diagonalisace konvolučního operátoru . . . . .	255
<b>17 Kvadratický svět</b>	<b>259</b>
17.1 Bilineární a kvadratické formy . . . . .	259
17.2 Matice kvadratické formy . . . . .	261
17.3 Diagonalisace kvadratické formy . . . . .	264
17.4 Signatura, definitnost . . . . .	271
17.5 Kvadriky a kuželosečky . . . . .	272
17.6 Vlnky a kódování obrazu . . . . .	280
<b>18 Dvě maticové bagately</b>	<b>287</b>
18.1 Pseudoinverse matice . . . . .	287
18.2 Polární rozklad operátoru . . . . .	289

<b>19 Říše tenzorů</b>	<b>293</b>
19.1 Co jest tensor . . . . .	293
19.2 Symetrické a antisymetrické tenzory . . . . .	306
19.3 Tenzory v obecné relativitě . . . . .	317
19.4 Spinory . . . . .	322
19.5 Tenzory a nezávislé jevy . . . . .	332
19.6 Epilog . . . . .	336

(Text k obrázkům na obálce viz definici rovnoběžnostěnu v kapitole Prostory plné vektorů a též kapitolu Dláždění a krystaly.)

## Návod ke čtení těchto skript

Texty psané antikvou této velikosti jsou určeny i začátečníkům (třeba jako doplněk k přednášce jednoho z autorů tohoto textu) a obsahují látku, kterou doporučujeme studentům všech druhů studia libovolného ročníku na MFF UK. Rozšiřující partie psané někdy menším písmem<sup>1</sup> a někdy značkami (#) resp. (♡) označujícími začátek resp. konec dotyčné „rozšiřující partie“ jsou určeny pokročilejším, resp. více motivovaným čtenářům. Ani tyto partie však nevyžadují větší předběžné znalosti, snad kromě ovládnutí „kalkulu“, tzn. elementů diferenciálního a integrálního počtu – jako oblastí, které často zasahují svým tématem. Skripta jsou psána dosti stručně nejen z důvodu „snahy udržet rozsah v únosných mezích“<sup>2</sup>. Žádný předmět nelze dobře ovládnout bez jistého vlastního „tvůrčího“ úsilí. Partie vynechané se slovy „dokažte si sami“ nedoporučujeme přeskakovat, pokud by čtenáři nebyla věc dost jasná, i když to třeba ještě neumí zformulovat. Může se stát, že vynechané partie vyvolají nevoli čtenáře případně přání nalézt podrobnější vysvětlení. Uvítáme tedy jakoukoliv, nejlépe však konstruktivní, kritiku a náměty pro zlepšení a rozšíření našeho textu. V dalších verzích tohoto –zatím provisorního– textu se pokusíme na uvedené náměty reagovat.

„Vulgarisující“ shrnutí a poznámky nevyžadující zvláštní vnímavost a inteligenci jsou psány strojopisným fontem („pro ty s přímočařejším chápáním matematiky“<sup>3</sup>).

<sup>1</sup>Konečné rozhodnutí, které pasáže pojmáme jako rozšiřující, jsme ještě neprovedli.

<sup>2</sup>Tedy lenosti.

<sup>3</sup>Což mohou být i autoři textu. V dalším plánujeme uvedený typ poznámek podstatně rozšířit. Niels Bohr při své návštěvě v Moskvě v roce 1960 prohlásil, že se nikdy před svými studenty nebrání prozradit, že je hlupák. Převodčík to přeložil tak, že se netají s tím, že jsou studenti hlupáci. Kapica (možná někdo jiný) vtípně replikoval, že právě v tomto tkví