

Obsah

Předmluva	i
Obsah	ii
Některá označení	iv
Kapitola 1. Fourierovy řady	1
1.1. Abstraktní Fourierovy řady	1
1.2. Trigonometrické řady	9
1.3. Sčítání trigonometrických řad	18
1.4. Abstraktní Fourierovy řady ve fyzice	25
Výsledky kapitoly 1	37
Kapitola 2. Funkce komplexní proměnné	42
2.1. Komplexní čísla. Komplexní rovina. Stereografická projekce	42
2.2. Funkce komplexní proměnné – limita, spojitost, derivace. Cauchyovy-Riemannovy podmínky. Elementární funkce	48
2.3. Křivkové integrály. Cauchyova věta. Mocninné řady	58
2.4. Laurentovy řady. Izolované singularity. Meromorfní funkce. Reziduová věta	76
2.5. Grupa lineárních lomených zobrazení. Konformní zobrazení	103
2.6. Příklady s fyzikální tematikou	121
Výsledky kapitoly 2	125
Kapitola 3. Fourierova a Laplaceova transformace	136
3.1. Fourierova transformace. Fourierův integrál	136
3.2. Laplaceova transformace funkcí jedné reálné proměnné	147

3.3. Úkoly s fyzikální tematikou	155
Výsledky kapitoly 3	158
Literatura	160

1.1. Abstraktní Fourierovy řady

V následujících úvahách budeme uvažovat Hilbertův separabilní prostor nekonečné dimenze (reálný či komplexní) se skalárním součinem (\cdot, \cdot) a s normou $\|\cdot\|$. Příkladem takového prostoru je prostor $H = L_2(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) všech funkcí definovaných skoro všude na intervalu (a, b) a integrovatelných druhého řádu. V prostoru L_2 uvažujeme skalární součin $(u, v) := \int_a^b u(x)\overline{v(x)} dx$ a normu $\|u\|_2 = \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$; tento prostor je prakticky reálného či komplexního Hilbertova prostoru¹ v závislosti na tom, zda bereme reálné či komplexní funkce. Obecněji, je-li $\rho(x) > 0$ skoro všude kladná na intervalu (a, b) , můžeme v prostoru $L_2(a, b)$ všech funkcí takových, že $|u(x)|^2 \rho(x)$ je integrovatelná funkce, se skalárním součinem $(u, v)_\rho := \int_a^b u(x)\overline{v(x)}\rho(x) dx$ a s normou $\|u\|_{2,\rho} = \left(\int_a^b |u(x)|^2 \rho(x) dx\right)^{1/2}$.

Abstraktní Fourierova řada v H je zobecněním rozkladu vektoru $u \in \mathbb{R}_n$ do kartézských souřadnic. Zobecněním kartézského systému souřadnic v \mathbb{R}_n je tzv. *úplný ortogonální systém* v H . Vypíšeme příslušné definice.

Definice 1. Řekneme, že systém $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in H$, ($n = 1, 2, \dots$) je *ortogonální*, jestliže $(x_n, x_m) = 0$ právě tehdy, když $n \neq m$ ($n, m \in \mathbb{N}$). Je-li navíc $\forall (n \in \mathbb{N}) : (x_n, x_n) = \|x_n\|^2 = 1$, nazveme ho *ortonormální*. Ortogonální systém se nazývá *úplný*, jestliže neexistuje nemulový prvek $x \in H$, kolmý ke všem prvkům systému, tj. jestliže platí implikace

$$\forall (x \in H) [(x, x_n) = 0, n = 1, 2, \dots \Rightarrow x = 0].$$

¹přesněji Hilbertova prostoru nad tělesem reálných či komplexních čísel