

Krátkou charakterizaci většiny příkladů naleznete v závěru knihy za seznamem literatury. Aktuální stav elektronické verze sbírky naleznete na stránce M.Z., která byla koncem roku 2002 umístěna na

<http://adela.karlin.mff.cuni.cz/~mzahrad/>

Obsah

1	Geometrie a soustavy rovnic	12
1.1	Jedna obyčejná soustava lineárních rovnic	12
1.2	Soustava 4×4 s parametrem	13
1.3	Odpor osmistěnu	16
1.4	Soustavy lineárních rovnic a elektrické obvody	17
2	Hrátky s grupami a permutacemi	21
2.1	Grupová rozcvička aneb Symetrie čtyřstěnu	21
2.2	Jednoduché grupy	25
2.3	Grupy a teorie čísel	28
2.4	Nevelké grupy	29
2.5	Grupa generovaná Pauliho maticemi	31
2.6	Konjugované prvky	32
2.7	Rozklady grup, přímé a polopřímé součiny	33
2.8	Znaménko permutace	35
2.9	Permutace devětkrát jinak	36
2.10	Lloydova patnáctka a permutace	40
3	Konečná i jiná tělesa	43
3.1	Tělesa modulo prvočíslo	43
3.2	Zmatené výpočty s inverzní maticí	43
3.3	Podprostory nad konečným tělesem	45
3.4	Konečná tělesa polynomů	46
3.5	Vzorec pro Ludolfovo číslo od Johna Machina	48
3.6	Sudé podmnožiny se sudými průniky	49
3.7	Doplňování systému sudých podmnožin se sudými průniky	51
3.8	Liché podmnožiny s lichými průniky	52
3.9	Liché podmnožiny se sudými průniky	53
3.10	Sudé podmnožiny s lichými průniky	54

4	Vektorová odysea	56
4.1	Rozklad degenerovaného rovnoběžnostěnu	56
4.2	Tři základní vektorové prostory	60
4.3	Jeden neobvyklejší vektorový prostor	61
4.4	Je to podprostor, není to podprostor...	62
4.5	Lineární závislost vektorů z \mathbb{R}^4	65
4.6	Dimenze lineárního obalu	67
4.7	Hodnota lineárního zobrazení	68
4.8	Složky vektoru vzhledem k ortogonální bázi	70
4.9	Báze, souřadnice, homomorfizmy	71
4.10	Magické čtverce	77
4.11	Vektory se sudým počtem jedniček	80
4.12	Bernšteinovy polynomy	81
5	Úlohy pro ortogonalisty	83
5.1	Ortogonální doplněk	83
5.2	Grammova-Schmidtova ortogonalizace	85
5.3	Ortogonální doplněk jednoho řádkového prostoru	89
5.4	Různé normy v \mathbb{R}^n	89
5.5	Normy pro matice	92
5.6	Jak daleko jsou vektory od matic, aneb Hrušky s jabkama	93
5.7	Lineární regrese tak nebo jinak	95
6	Matice a jim podobné	100
6.1	Pauliho spinové matice	100
6.2	Matice homomorfizmu	104
6.3	Ortogonální projektory na podprostor	106
6.4	Matice vektorového součinu	110
6.5	Výpočet inverzní matice	113
6.6	Modulární grupa	114
6.7	Fisherova nerovnost	119
6.8	Cykličnost stopy	120
7	Lineární algebra pro grafiky	122
7.1	Je to strom nebo není to strom?	122
7.2	Laplaceova matice	123
7.3	Počet koster	124

7.4	Prostor cyklů grafu	124
7.5	Spektrum matice incidence grafu	125
7.6	Vlastnosti matice incidence grafu	127
7.7	Spektrum matice incidence Petersenova grafu	130
7.8	Rozklad úplného grafu na tři Petersenovy grafy	131
7.9	Spektrum matice incidence součinu grafů	131
7.10	Jak poznat stupeň souvislosti v grafu?	133
7.11	Expandéry	135
8	Determinátoři	136
8.1	Obyčejné determinanty s čísly	145
8.2	Determinant s řeckými písmeny	147
8.3	Vandermondův determinant	148
8.4	Výpočet cirkulantu využitím znalosti spektra	150
8.5	Zobecněná Hilbertova matice	151
8.6	Rezultant	153
8.7	Poloha bodu vůči nadrovině	155
8.8	Cauchy–Binetova věta	156
9	Naše první vlastní čísla	160
9.1	Fibonacciho posloupnost	160
9.2	Gershgorinova věta	162
9.3	Vlastní čísla jedné obyčejné matice	163
9.4	Vlastní čísla pro začátečníky	164
9.5	Vlastní čísla matice 4×4	165
9.6	Sinus matice	167
9.7	Odmocnina z matice	169
9.8	Sinus či odmocnina matice jinak	170
9.9	Napůl normální, napůl nilpotentní zobrazení	173
9.10	Jak počítat charakteristický polynom matice 3×3 pomocí jejích invariantů	175
9.11	Jednorozměrný model krystalu	178
10	Grupy matic a otců	182
10.1	Jak zatočit s maticemi v \mathbb{R}^2	182
10.2	Matice otočení v \mathbb{R}^3	185
10.3	Grupa Lorentzových transformací	189
10.4	Reprezentace	191

11	Exponenciála se nebojí	194
11.1	Dvouhadinový systém aneb Hrátky s maticí 2×2 . . .	194
11.2	Soustava diferenciálních rovnic s rezonancí	197
11.3	Diferenciální rovnice s pravou stranou	201
11.4	Komplexně půvabná diferenciální rovnice	203
11.5	Soustava 3 diferenciálních rovnic	206
11.6	Lineární nezávislost řešení soustavy diferenciálních rovnic	208
11.7	Jsou exponenciála a logaritmus opravdu navzájem inverzní?	209
11.8	Generátory $SU(2)$ aneb Výpočet exponenciály trikem pro speciální matici	212
11.9	Jedna exponenciální formule pro determinant	214
12	Lieovy hlavolamy	220
12.1	Jak připravit kysličník sírový	220
12.2	Algebra \mathfrak{so}_3 a vektorový součin	222
12.3	Řešitelné algebry	225
12.4	Anihilátor	225
12.5	Nebojte se Dynkinových diagramů	227
13	Duální prostory k pronájmu	232
13.1	Transformace složek formy při změně báze	232
13.2	Duální báze	233
13.3	Jedna opravdová forma	239
14	Malice pro středně pokročilé	241
14.1	Konvergence k vlastním číslům	241
14.2	Malice hustoty	242
14.3	Spektrum polynomu	244
14.4	Ještě jednou polynomy matic	245
14.5	Polynomy matic potřetí	246
14.6	Vlastní čísla nerozložitelných matic	248
14.7	Hadamardovy malice	249
14.8	Základní vektorové identity v \mathbb{R}^3	251
14.9	Chování smíšeného součinu při lin. transformacích . .	252
14.10	Komutátorová binomická formule	254
14.11	Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích	254

15	Jordan hledí pozitivně	259
15.1	Birkhoffova věta	259
15.2	Stochastické matice	260
15.3	Nilpotentní matice	261
15.4	Jordanův tvar poprvé	268
15.5	Jordanův tvar podruhé	270
15.6	Jordanův tvar potřetí	272
15.7	Jordanův tvar počtvrté	274
15.8	Jordanův tvar naposledy	276
15.9	Jsou si ty matice opravdu podobné?	278
16	Ortogonální funkce a trochu kvantové mechaniky	281
16.1	Ortogonální polynomy	281
16.2	Variace na kreační operátory	287
16.3	$SO(4)$ symetrie atomu vodíku	290
16.4	Vícerozměrný anizotropní harmonický oscilátor	298
16.5	Kvantování momentu hybnosti	301
17	Lepé tvary kvadratické	306
17.1	Klasifikace kvadrik aneb Vzorečky, vzorečky	306
17.2	Klasifikace kvadrik aneb Jak to vymyslet sám	311
17.3	Diagonalizace kvadratické formy: řádkové a sloup- cové úpravy	314
17.4	Diagonalizace kvadratické formy: vlastní čísla	316
17.5	Signatura kvadratické formy	318
17.6	Signatura stručně	320
17.7	Průmět průniku paraboly a nadroviny	321
17.8	Poloha bodu vůči sféře	322
17.9	Chladící věže poprvé: \mathbb{R}^3	323
17.10	Chladící věže podruhé: \mathbb{R}^n	325
18	Rozklady polárníka při teplotní pseudoinverzi	331
18.1	Polární rozklad deformačního gradientu	331
18.2	Polární rozklad singulární matice	336
18.3	Nejbližší řešení soustavy rovnic	337
18.4	Lineární regrese potřetí jinak	337

19	Poklady ukryté v tenzorech	340
19.1	Jak může vypadat tenzor typu $(2, 1)$	340
19.2	Jednoduchý tenzor typu $(0, 2)$	342
19.3	Tenzor setrvačnosti	343
19.4	Tenzory ve speciální relativitě	345
19.5	O Levi–Civitově tenzoru	350
19.6	Symetrické a antisymetrické tenzory	354
19.7	Tenzorové součiny operátorů	357
19.8	Rozložitelné antisymetrické tenzory a vektorový součin	358
20	Několik dalších příkladů	362
20.1	Násobení blokových matic; výpočet inverze blokové matice	362
20.2	Gaussovské integrály v \mathbb{R}^n — základní výpočty	362
20.3	Integrály polynomů a exponenciály (vytvorující funkce) vůči gaussovské míře	366
20.4	Exponenciála mocninné řady a rozvoj logaritmu	371
20.5	Přibližné výpočty velkých mocnin matic	373
20.6	Násobení blokových matic typu 2×2	374
20.7	Cyklické vektory operátorů	375
20.8	Zobecněný Vandermondův determinant	377
20.9	Výpočet odmocniny symetrické matice	379
20.10	Pfaffián antisymetrické matice	380
20.11	Populační model	383
20.12	Resolventa matice a operátoru	385
20.13	Signatura kvadratické formy	387
20.14	Rozsazení u kulatého stolu	388
20.15	Signatura cyklické kvadratické formy	390
20.16	Přibližný výpočet $A^n x$	392
20.17	Ortogonalizace posloupnosti	393
20.18	Ortogonalizace posloupnosti funkcí	394
20.19	Goniometrický Vandermondův determinant	395
20.20	Jednoduchý příklad na spektrum	396
20.21	Systémy oscilátorů s vnější silou typu δ -funkce	396
20.22	Resonance v soustavách lineárních diferenciálních rovnic	398
20.23	Několik číselných příkladů na řešení lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty	399

20.24	Převedení obdélníkové matice $(A B)$ na tvar $(1 A^{-1}B)$. Co všechno z toho plyne.	401
20.25	Minima kvadratických forem a systémy mnoha spřažených harmonických oscilátorů	403
20.26	Interpretace výsledku úlohy 20.25 pro systém spřažených oscilátorů. Feynman-Kacova formule. . . .	405
20.27	Anihilační a kreační operátor na konečněrozměrném prostoru se skalárním součinem	409
20.28	Projekce ortogonální báze	410
20.29	Translačně invariantní kvadratické formy a náhodné procházky na mříži	411
20.30	Lorentzovy transformace	421