

# Obsah

|  |           |
|--|-----------|
| <b>0 ÚVOD</b>  | <b>9</b>  |
| 0.1 Krátce z historie splajně . . . . .                                  | 9         |
| 0.2 Hlavní směry v teorii a aplikacích splajně . . . . .                 | 9         |
| 0.3 Příklady splajně . . . . .   | 10        |
| 0.4 Cíl knihy . . . . .  | 11        |
| <b>1 NĚKTERÉ MATEMATICKÉ POJMY</b>                                       | <b>12</b> |
| 1.1 Úloha o interpolaci polynomem . . . . .                              | 12        |
| 1.1.1 Jednoduché uzly . . . . .  | 12        |
| 1.1.2 Interpolace s násobnými uzly . . . . .                             | 12        |
| 1.1.3 Interpolace v rovině . . . . .                                     | 13        |
| 1.2 Poměrné diference . . . . .  | 13        |
| 1.3 Řešení soustav lineárních rovnic . . . . .                           | 16        |
| 1.3.1 Použití dekompozice . . . . .                                      | 16        |
| 1.3.2 Soustavy s třídiagonální maticí . . . . .                          | 17        |
| 1.3.3 Soustava s cyklickou třídiagonální maticí . . . . .                | 17        |
| 1.3.4 Diagonálně dominantní, monotonní matice . . . . .                  | 18        |
| 1.4 Třídy funkcí, používané věty z matematické analýzy . . . . .         | 19        |
| <b>2 LOKÁLNÍ SPLAJNY</b>   | <b>21</b> |
| 2.1 Interpolace po částech konstantní funkcí . . . . .                   | 21        |
| 2.2 Lineární interpolující splajn . . . . .                              | 22        |
| 2.2.1 Analytické vyjádření a vlastnosti polygonu . . . . .               | 22        |
| 2.2.2 Odhad chyby interpolace polygonem . . . . .                        | 23        |
| 2.2.3 Bilineární interpolující splajny . . . . .                         | 24        |
| 2.2.4 Dvourozměrné lineární splajny na trojúhelníkové síti . . . . .     | 25        |
| 2.3 Lokální kubické (Hermitovy) splajny . . . . .                        | 27        |
| 2.3.1 Konstrukce splajnu . . . . .                                       | 27        |
| 2.3.2 Odhad chyby interpolace . . . . .                                  | 31        |
| 2.4 Lokální splajny vyšších stupňů . . . . .                             | 33        |
| 2.4.1 Lokální splajny lichého stupně . . . . .                           | 33        |
| 2.4.2 Lokální splajny sudého stupně . . . . .                            | 34        |
| 2.5 Bikubické lokální splajny . . . . .                                  | 35        |
| 2.6 Úlohy ke kapitole 2 . . . . .  | 37        |
| <b>3 KUBICKÉ INTERPOLAČNÍ SPLAJNY</b>                                    | <b>38</b> |
| 3.1 Prostor kubických splajně . . . . .                                  | 38        |
| 3.2 Podmínky pro první derivace splajnu $S_{31}$ . . . . .               | 39        |
| 3.3 Konstrukce splajnu $S_{31}(x)$ s použitím druhých derivací . . . . . | 42        |
| 3.4 Odhad chyby interpolace pro kubické splajny $S_{31}(x)$ . . . . .    | 46        |
| 3.5 Vliv okrajových podmínek na splajn $S_{31}(x)$ . . . . .             | 48        |
| 3.6 Lokálnost, konvexita, monotonnost splajnu $S_{31}(x)$ . . . . .      | 49        |
| 3.6.1 Lokálnost . . . . .  | 49        |
| 3.6.2 Zachování konvexnosti . . . . .                                    | 50        |
| 3.6.3 Zachování monotonnosti . . . . .                                   | 51        |
| 3.6.4 Asymptotické vlastnosti splajnu $S_{31}(x)$ . . . . .              | 53        |
| 3.7 Bikubické interpolující splajny . . . . .                            | 54        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.7.1    | Formulace problému – lokální a globální parametry . . . . .                    | 54        |
| 3.7.2    | Existence a jednoznačnost, algoritmus výpočtu splajnu $S(x, y)$ . . . . .      | 56        |
| 3.7.3    | Odhad chyby interpolace bikubickým splajnem . . . . .                          | 58        |
| 3.8      | Úlohy ke kapitole 3 . . . . .  | 59        |
| <b>4</b> | <b>KVADRATICKÉ SPLAJNY</b> . . . . .   | <b>60</b> |
| 4.1      | Formulace problému pro síť $(\Delta x)$ . . . . .                              | 60        |
| 4.1.1    | Polynomická reprezentace . . . . .   | 60        |
| 4.1.2    | Vhodnější zápis splajnu . . . . .  | 60        |
| 4.1.3    | Jiná volba volného parametru . . . . .   | 62        |
| 4.1.4    | Histosplajny . . . . .   | 62        |
| 4.2      | Kvadratické splajny na síti $(\Delta x \Delta t)$ . . . . .                    | 62        |
| 4.2.1    | Algoritmus s prvními derivacemi . . . . .                                      | 63        |
| 4.2.2    | Algoritmus s druhými derivacemi . . . . .                                      | 66        |
| 4.2.3    | Jiná konstrukce kvadratických splajnů . . . . .                                | 70        |
| 4.3      | Lokální vlastnosti kvadratických splajnů . . . . .                             | 71        |
| 4.3.1    | Výběr uzlů splajnu, bodů interpolace, okrajových podmínek . . . . .            | 71        |
| 4.3.2    | Lokální vliv hodnot $g_i$ na splajn $S_{21}(x)$ . . . . .                      | 71        |
| 4.3.3    | Lokální vliv okrajových podmínek . . . . .                                     | 71        |
| 4.3.4    | Zachování monotonnosti a konvexnosti . . . . .                                 | 72        |
| 4.4      | Odhad chyby interpolace . . . . .  | 76        |
| 4.5      | Bikvadratické splajny . . . . .  | 77        |
| 4.5.1    | Bikvadratický splajn na jednoduché síti $(\Delta 1)$ . . . . .                 | 77        |
| 4.5.2    | Formulace úlohy pro separovanou síť $(\Delta 2)$ , lokální parametry . . . . . | 78        |
| 4.5.3    | Výpočet parametrů bikvadratického splajnu . . . . .                            | 81        |
| 4.5.4    | Jiné typy okrajových podmínek . . . . .  | 84        |
| 4.6      | Chyba interpolace bikvadratickým splajnem . . . . .                            | 84        |
| 4.7      | Kvadratický splajn interpolující střední hodnoty . . . . .                     | 85        |
| 4.8      | Kvadratický splajn interpolující hodnoty derivací . . . . .                    | 87        |
| 4.8.1    | Interpolace derivací v uzlech splajnu . . . . .                                | 87        |
| 4.8.2    | Interpolace hodnot derivací v obecných uzlech interpolace . . . . .            | 88        |
| 4.9      | Úlohy ke kapitole 4 . . . . .  | 89        |
| <b>5</b> | <b>SPLAJNY VYŠŠÍCH STUPŇŮ</b> . . . . .  | <b>91</b> |
| 5.1      | Formulace problému . . . . .   | 91        |
| 5.2      | Elementární konstrukce interpolujících splajnů . . . . .                       | 91        |
| 5.2.1    | Splajn $S_{51}(x)$ . . . . .   | 91        |
| 5.2.2    | Elementární konstrukce splajnu $S_{41}$ . . . . .                              | 92        |
| 5.3      | Výpočet splajnu $S_{51}$ pomocí jeho čtvrtých derivací . . . . .               | 92        |
| 5.3.1    | Výpočet čtvrtých derivací . . . . .  | 92        |
| 5.3.2    | Výpočet ostatních parametrů splajnu . . . . .                                  | 94        |
| 5.4      | Splajn čtvrtého stupně . . . . .   | 95        |
| 5.4.1    | Výpočet třetích derivací splajnu $S_{41}$ . . . . .                            | 96        |
| 5.4.2    | Výpočet prvních a druhých derivací . . . . .                                   | 97        |
| 5.5      | Splajny vyšších stupňů na ekvidistantní síti . . . . .                         | 99        |
| 5.5.1    | Splajny lichých stupňů na ekvidistantní síti . . . . .                         | 99        |
| 5.5.2    | Splajny sudých stupňů na ekvidistantní síti . . . . .                          | 100       |
| 5.6      | Přirozené splajny . . . . .  | 100       |
| 5.7      | Úlohy ke kapitole 5 . . . . .  | 102       |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>6</b> | <b>BÁZOVÉ SPLAJNY A JEJICH POUŽITÍ</b>                              | <b>103</b> |
| 6.1      | Reprezentace splajnů . . . . .                                      | 103        |
| 6.1.1    | Po částech polynomičká (PP) reprezentace splajnu . . . . .          | 103        |
| 6.1.2    | Funkce $(x - x_i)_+^j$ . . . . .                                    | 103        |
| 6.1.3    | Fundamentální splajny . . . . .                                     | 105        |
| 6.1.4    | Potřebné vlastnosti báze . . . . .                                  | 105        |
| 6.2      | Bázové splajny (B-splajny) . . . . .                                | 106        |
| 6.2.1    | Definice a základní vlastnosti B-splajnů . . . . .                  | 106        |
| 6.2.2    | Příklady B-splajnů . . . . .  | 107        |
| 6.3      | B-splajny tvoří bázi . . . . .                                      | 109        |
| 6.4      | Rekurentní vztah pro výpočet B-splajnů . . . . .                    | 112        |
| 6.5      | Derivace B-splajnů . . . . .  | 115        |
| 6.6      | Interpolace B-splajny . . . . .                                     | 116        |
| 6.6.1    | Příklad – interpolace kvadratickými splajny . . . . .               | 116        |
| 6.6.2    | Příklad – interpolace kubickým splajnem . . . . .                   | 117        |
| 6.7      | Interpolace s násobnými uzly . . . . .                              | 118        |
| 6.8      | Další vlastnosti splajnů z prostoru $S^k(\Delta y)$ . . . . .       | 118        |
| 6.8.1    | Vztahy mezi koeficienty $b_i$ a hodnotami $S(t_i)$ . . . . .        | 118        |
| 6.8.2    | Izogeometrické vlastnosti . . . . .                                 | 119        |
| 6.9      | Lokální aproximace funkcí . . . . .                                 | 120        |
| 6.9.1    | Kubické splajny . . . . .   | 120        |
| 6.9.2    | Kvadratické splajny . . . . .                                       | 122        |
| 6.10     | Výběr uzlů splajnu a metody aproximace . . . . .                    | 122        |
| 6.11     | Racionální B-splajny . . . . .                                      | 122        |
| 6.12     | B-splajny ve dvou proměnných . . . . .                              | 124        |
| 6.13     | Úlohy ke kapitole 6 . . . . .                                       | 127        |
| <b>7</b> | <b>EXTREMÁLNÍ VLASTNOSTI SPLAJNŮ</b>                                | <b>128</b> |
| 7.1      | Extremální vlastnosti polygonu . . . . .                            | 128        |
| 7.2      | Extremální vlastnost splajnu $S_{32}$ . . . . .                     | 129        |
| 7.3      | Extremální vlastnosti kubických splajnů . . . . .                   | 130        |
| 7.4      | Kvadratické splajny . . . . .                                       | 131        |
| 7.5      | Splajny lichých stupňů . . . . .                                    | 133        |
| 7.5.1    | Extremální vlastnost splajnu pátého stupně . . . . .                | 133        |
| 7.5.2    | Extremální vlastnost splajnů lichých stupňů . . . . .               | 134        |
| 7.6      | Extremální vlastnosti splajnů sudých stupňů . . . . .               | 134        |
| 7.6.1    | Přirozený splajn $S_{41}$ , interpolující střední hodnoty . . . . . | 134        |
| 7.7      | Přirozené splajny ve dvou a více proměnných . . . . .               | 136        |
| 7.8      | Úlohy ke kapitole 7 . . . . .                                       | 137        |
| <b>8</b> | <b>OBECNĚJŠÍ TYPY SPLAJNŮ</b>                                       | <b>138</b> |
| 8.1      | L-splajny . . . . .   | 138        |
| 8.2      | Extremální vlastnosti L-splajnů . . . . .                           | 139        |
| 8.3      | Zobecněné splajny, Čebyševovy splajny . . . . .                     | 140        |
| 8.4      | Lg-splajny . . . . .  | 140        |
| 8.5      | Příklady zobecněných splajnů . . . . .                              | 141        |
| 8.5.1    | Trigonometrické splajny . . . . .                                   | 141        |
| 8.5.2    | Splajny s parametry napjatosti . . . . .                            | 142        |
| 8.6      | Racionální splajny . . . . .  | 144        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 8.6.1     | Racionální kubické splajny  | 144        |
| 8.6.2     | Racionální kvadratické splajny                                      | 145        |
| 8.7       | Izogeometrické interpolace  | 147        |
| 8.8       | Úlohy ke kapitole 8   | 148        |
| <b>9</b>  | <b>SPLAJNY V METODĚ NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ,<br/>VYHLAZOVACÍ SPLAJNY</b> | <b>149</b> |
| 9.1       | Metoda nejmenších čtverců   | 149        |
| 9.2       | Aproximace polygonem – lineárním splajnem                           | 150        |
| 9.3       | Aproximace kubickým splajnem  | 151        |
| 9.4       | Aproximace kvadratickým splajnem                                    | 152        |
| 9.5       | Aproximace diskrétních hodnot                                       | 153        |
| 9.6       | Chyba aproximace  | 154        |
| 9.7       | Vyhlazovací splajny – formulace úlohy                               | 155        |
| 9.8       | Vyhlazovací polygon   | 156        |
| 9.9       | Kubický vyhlazovací splajn  | 157        |
| 9.10      | Kvadratický vyhlazovací splajn                                      | 160        |
| 9.11      | Další zobecnění   | 163        |
| 9.12      | Úlohy ke kapitole 9   | 163        |
| <b>10</b> | <b>SPLAJNY V HILBERTOVĚ PROSTORU</b>                                | <b>164</b> |
| 10.1      | Úvod  | 164        |
| 10.2      | Formulace úlohy   | 164        |
| 10.3      | Otázky existence a jednoznačnosti                                   | 165        |
| 10.3.1    | Interpolující splajn  | 165        |
| 10.3.2    | Vyhlazující splajn  | 166        |
| 10.3.3    | Splajn na konvexní množině  | 167        |
| 10.4      | Příklady  | 168        |
| 10.4.1    |   | 168        |
| 10.4.2    |   | 168        |
| 10.4.3    |   | 169        |
| 10.4.4    | Splajn na nepravidelné síti v $\mathbb{R}^n$                        | 169        |
| 10.5      | Obecný algoritmus sestavení interpolujícího splajnu                 | 170        |
| 10.6      | Obecný algoritmus výpočtu vyhlazujícího splajnu                     | 172        |
| 10.7      | Realizace obecných algoritmů pro splajny                            | 173        |
| <b>11</b> | <b>SPLAJNOVÉ KŘIVKY</b>   | <b>174</b> |
| 11.1      | Z diferenciální geometrie křivek                                    | 174        |
| 11.1.1    | Základní pojmy  | 174        |
| 11.1.2    | Třídy spojitosti, dotyk křivek                                      | 175        |
| 11.2      | Interpolace křivky parametrickými splajny                           | 176        |
| 11.2.1    | Obecně o interpolaci parametricky zadaných křivek                   | 176        |
| 11.2.2    | Hermitův parametrický splajn  | 177        |
| 11.2.3    | Kvadratické parametrické splajny                                    | 177        |
| 11.2.4    | Kubické parametrické splajny  | 178        |
| 11.3      | $\nu$ -splajny  | 180        |
| 11.4      | Splajny jako Bézierovy křivky                                       | 181        |
| 11.4.1    | Bézierovy křivky  | 181        |
| 11.4.2    | Kubická splajnová křivka, určená kontrolním polygonem               | 183        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 11.4.3    | Kvadratická splajnová křivka určená kontrolním polygonem . . .                           | 184        |
| 11.4.4    | Generování bodu Bézierovy křivky rekurzí . . . . .                                       | 185        |
| 11.5      | B-splajnové křivky . . . . .   | 186        |
| 11.6      | Beta-splajny . . . . .   | 187        |
| 11.7      | Racionální B-splajnové křivky . . . . .  | 188        |
| 11.8      | Úlohy ke kapitole 11 . . . . .   | 190        |
| <b>12</b> | <b>SPLAJNOVÉ PLOCHY</b>  | <b>191</b> |
| 12.1      | Z diferenciální geometrie ploch . . . . .  | 191        |
| 12.2      | Hladkosti spojení dvou částí plochy . . . . .  | 192        |
| 12.3      | Splajnové plochy určené podmínkami interpolace . . . . .                                 | 193        |
| 12.4      | Splajnové plochy určené okrajem . . . . .  | 194        |
| 12.4.1    | Coonsovy plochy . . . . .  | 194        |
| 12.4.2    | Plochy tvaru $\bar{\mathbf{r}}(u, v) = \mathbf{f}^T(u)\mathbf{M}\mathbf{f}(v)$ . . . . . | 195        |
| 12.5      | Plochy určené sítí kontrolních bodů . . . . .  | 196        |
| 12.5.1    | Bézierovy plochy . . . . .   | 196        |
| 12.5.2    | B-splajnové plochy určené sítí kontrolních vrcholů . . . . .                             | 197        |
| 12.5.3    | Plochy vytvořené racionálními B-splajny . . . . .  | 198        |
| 12.5.4    | Jiná použití B-splajnů k návrhu ploch . . . . .  | 199        |
| 12.6      | Trojúhelníkové pláty . . . . .   | 200        |
| 12.6.1    | Degenerované čtyřúhelníkové pláty . . . . .  | 200        |
| 12.6.2    | Speciální metody interpolace . . . . .   | 200        |
| 12.6.3    | Trojúhelníkové Bernštejnovy-Bézierovy pláty . . . . .                                    | 202        |
| 12.7      | Úlohy ke kapitole 12 . . . . .   | 205        |
| <b>13</b> | <b>UŽITÍ SPLAJNŮ V NUMERICKÉ MATEMATICE</b>  | <b>206</b> |
| 13.1      | Obecný postup při aplikaci splajnů . . . . .   | 206        |
| 13.2      | Užití splajnů při řešení rovnic . . . . .  | 206        |
| 13.3      | Použití splajnů k numerickému výpočtu derivací . . . . .                                 | 206        |
| 13.3.1    | Použití kubických splajnů . . . . .  | 207        |
| 13.3.2    | Kvadratické splajny . . . . .  | 208        |
| 13.3.3    | Použití B-splajnů . . . . .  | 208        |
| 13.4      | Užití splajnů k numerické integraci . . . . .  | 209        |
| 13.5      | Řešení počátečních úloh . . . . .  | 211        |
| 13.5.1    | Hermitovy formule . . . . .  | 212        |
| 13.5.2    | Použití kvadratického splajnu . . . . .  | 212        |
| 13.5.3    | Použití kubických splajnů . . . . .  | 214        |
| 13.5.4    | Použití splajnů vyšších stupňů . . . . .   | 215        |
| 13.6      | Okrajové úlohy . . . . .   | 215        |
| 13.6.1    | Lineární okrajové úlohy . . . . .  | 216        |
| 13.6.2    | Použití B-splajnů . . . . .  | 216        |
| 13.6.3    | Zvýšení přesnosti kolokační metody . . . . .   | 218        |
| 13.6.4    | Nelineární okrajové úlohy . . . . .  | 218        |
| 13.7      | Kolokace splajny u parciálních rovnic . . . . .  | 219        |
| 13.8      | Úlohy ke kapitole 13 . . . . .   | 220        |
|           | <b>Literatura</b>  | <b>221</b> |