Obsah

Předmluva k českému vydání 9
Předmluva 10

Kapitola 1

Úvod 13

§ 1.1 Jak vznikají extremální úlohy? 13
1.1.1 Klasická izoperimetrická úloha. Didónina úloha 13
1.1.2 Další starověké extremální úlohy v geometrii 18
1.1.3 Fermatův variační princip a Hyugensův princip. Úloha o lomu světla 21
1.1.4 Úloha o brachystochroně. Vznik variačního počtu 24
1.1.5 Newtonova aerodynamická úloha 26
1.1.6 Úloha o dietě a dopravní problém 27
1.1.7 Úloha časové optimalizace 28

§ 1.2 Jak se formalizují extremální úlohy? 28
1.2.1 Základní definice 28
1.2.2 Nejjednodušší příklady formalizace extremálních úloh 29
1.2.3 Formalizace Newtonovy úlohy 31
1.2.4 Různé formalizace klasické izoperimetrické úlohy a úlohy o brachystochroně. Nejjednodušší úloha časové optimalizace 33
1.2.5 Formalizace dopravního problému a úlohy o dietě 35
1.2.6 Základní třídy extremálních úloh 36

§ 1.3 Pravidlo Lagrangeových multiplikátorů a Kuhnův-Tuckerův teorém 40
1.3.1 Fermatův teorém 40
1.3.2 Pravidlo Lagrangeových multiplikátorů 42
1.3.3 Kuhnův-Tuckerův teorém 46
1.3.4 Důkaz konečnědimenzionálního teorému o oddělitelnosti 49

§ 1.4 Nejjednodušší úloha klasického variačního počtu a její zobecnění 51
1.4.1 Eulerova rovnice 51
1.4.2 Nutné podmínky v Bolzově úloze. Podmínky transverzality 56
1.4.3 Rozšíření nejjednodušší úlohy 57
1.4.4 Jehlovité variace. Weierstrassova podmínka 64
1.4.5 Izoperimetrická úloha a úloha s vyššími derivacemi 66

§ 1.5 Lagrangeova úloha a základní úloha optimálního řízení 70
1.5.1 Formulace úloh 70
1.5.2 Nutné podmínky v Lagrangeově úloze 71
1.5.3 Pontrjaginův princip maxima 73
1.5.4 Důkaz principu maxima v úloze s volným koncem 75

§ 1.6 Řešení úloh 81
1.6.1 Geometrické extremální úlohy 82

1.6.2 Newtonova aerodynamická úloha 85
1.6.3 Nejjednodušší úloha časové optimalizace 89
1.6.4 Klasická izoperimetrická úloha a Čaplyginova úloha 92
1.6.5 Úloha o brachystochroně a některé geometrické úlohy 97

Kapitola 2

Aparát teorie extremálních úloh 99
§ 2.1 Základní pojmy z funkcionální analýzy 99
2.1.1 Lineární normované prostory a Banachovy prostory 99
2.1.2 Součin prostorů. Faktorový prostor 101
2.1.3 Hahnův-Banachův teorém a jeho důsledky 103
2.1.4 Teorémy o oddělitelnosti 106
2.1.5 Banachův teorém o inverzním operátoru a lemma o pravém inverzním zobrazení . . . 110
2.1.6 Lemma o uzavřenosti obrazu 111
2.1.7 Lemma o anulátoru jádra regulárního operátoru 112
2.1.8 Absolutně spojité funkce 112
2.1.9 Rieszův teorém o obecném tvaru lineárního funkcionálu v prostoru C. Dirichletova formule 115
§ 2.2 Základy diferenciálního počtu v lineárních normovaných prostorech 117
2.2.1 Derivace ve směru, první variace, Gâteauxova a Fréchetova derivace, ostrá diferencovatelnost 117
2.2.2 Teorém o superpozici diferencovatelných zobrazení 123
2.2.3 Teorém o střední hodnotě a jeho důsledky 126
2.2.4 Derivování na součinu prostorů. Parciální derivace. Teorém o totálním diferenciálu . 129
2.2.5 Derivace vyšších řádů. Taylorův vzorec 132
§ 2.3 Teorém o implicitní funkci 138
2.3.1 Formulace teorému o existenci implicitní funkce 138
2.3.2 Modifikovaný princip kontrakce 138
2.3.3 Důkaz teorému 140
2.3.4 Klasické teorémy o implicitní funkci a o inverzním zobrazení 142
2.3.5 Tečný prostor a Ljusternikův teorém 146
§ 2.4 Diferencovatelnost některých konkrétních zobrazení 149
2.4.1 Němyckého operátor a operátor diferenciální vazby 149
2.4.2 Integrální funkcionál 152
2.4.3 Operátor okrajových podmínek 155
§ 2.5 Základní teorémy z teorie obyčejných diferenciálních rovnic 156
2.5.1 Základní předpoklady 157
2.5.2 Lokální existenční teorém 159
2.5.3 Teorém o jednoznačnosti 161
2.5.4 Lineární diferenciální rovnice 162
2.5.5 Globální teorém o existenci a spojité závislosti řešení na počátečních podmínkách a parametrech 166
2.5.6 Teorém o diferencovatelné závislosti řešení na počátečních podmínkách 170
2.5.7 Klasický teorém o diferencovatelné závislosti řešení na počátečních podmínkách . . . 173
§ 2.6 Základy konvexní analýzy 176
2.6.1 Základní definice 177
2.6.2 Konvexní množiny a konvexní funkce v lineárních topologických prostorech 183
2.6.3 Legendreova-Youngova-Fenchelova transformace. Fenchelův-Moreauův teorém . . . 189
2.6.4 Subdiferenciál. Moreauův-Rockafellarův teorém. Dubovického-Miljutinův teorém . . 194

Kapitola 3

Lagrangeův princip pro hladké úlohy s omezeními 203

§ 3.1 Elementární úlohy 203
3.1.1 Elementární úlohy bez omezení 203
3.1.2 Elementární úloha lineárního programování 207
3.1.3 Bolzova úloha 208
3.1.4 Elementární úloha optimálního řízení 210
3.1.5 Lagrangeův princip pro úlohy s rovnostmi a nerovnostmi 211
§ 3.2 Lagrangeův princip pro hladké úlohy s omezeními typu rovností a nerovností 213
3.2.1 Formulace teorému 213
3.2.2 Pravidlo multiplikátorů pro hladké úlohy s rovnostmi 215
3.2.3 Redukce úlohy 217
3.2.4 Důkaz teorému 218
§ 3.3 Lagrangeův princip a dualita v úlohách konvexního programování 221
3.3.1 Kuhnův-Tuckerův teorém (subdiferenciální tvar) 221
3.3.2 Metoda perturbací a teorém o dualitě 223
3.3.3 Lineární programování: existenční teorém a teorém o dualitě 227
3.3.4 Teorém o dualitě pro úlohy o nejkratší vzdálenosti. Hoffmanovo lemma a lemma o minimaxu 232
§ 3.4 Nutné podmínky druhého řádu a postačující podmínky extrému v hladkých úlohách . . . 242
3.4.1 Hladké úlohy s rovnostmi 242
3.4.2 Hladké úlohy s rovnostmi a nerovnostmi – nutné podmínky druhého řádu 244
3.4.3 Postačující podmínky extrému pro hladké úlohy s rovnostmi a nerovnostmi 248

Kapitola 4

Lagrangeův princip v úlohách klasického variačního počtu a v úlohách optimálního řízení 253

§ 4.1 Lagrangeův princip v úlohách klasického variačního počtu a v úlohách optimálního řízení. Lagrangeův princip pro Lagrangeovu úlohu 253
4.1.1 Formulace úlohy a teorému 253
4.1.2 Redukce Lagrangeovy úlohy na hladkou úlohu 257
4.1.3 Zobecněné Du Bois-Reymondovo lemma 259
4.1.4 Odvození podmínek stacionarity 261
4.1.5 Úloha s vyššími derivacemi. Eulerova-Poissonova rovnice 263
§ 4.2 Pontrjaginův princip maxima 266
4.2.1 Formulace úlohy optimálního řízení 266
4.2.2 Formulace principu maxima. Lagrangeův princip v úloze optimálního řízení 270
4.2.3 Jehlovité variace 272
4.2.4 Redukce na konečnědimenzionální úlohu 275
4.2.5 Důkaz principu maxima 277
4.2.6 Důkaz lemmatu o balíku jehel 281
4.2.7 Důkaz lemmatu o integrálních funkcionálech 287
§ 4.3 Úlohy optimálního řízení lineární vzhledem k fázovým proměnným 289
4.3.1 Redukce úlohy optimálního řízení lineární vzhledem k fázovým proměnným na úlohu ljapunovského typu 290
4.3.2 Ljapunovův teorém 292
4.3.3 Lagrangeův princip pro ljapunovské úlohy 294
4.3.4 Teorém o dualitě 301
4.3.5 Princip maxima pro úlohy optimálního řízení lineární vzhledem k fázovým proměnným 304
§ 4.4 Aplikace obecné teorie na nejjednodušší úlohu klasického variačního počtu 308
4.4.1 Eulerova rovnice. Weierstrassova podmínka. Legendreova podmínka 308

4.4.2 Podmínky druhého řádu pro slabý extrém. Podmínka Legendreova a Jacobiova . . . 310
4.4.3 Hamiltonův formalismus. Teorém o integrálním invariantu 313
4.4.4 Postačující podmínky absolutního extrému v nejjednodušší úloze 321
4.4.5 Sdružené body. Postačující podmínky silného a slabého extrému 325
4.4.6 Teorém E. Noetherové 333
4.4.7 Variační princip a zákony zachování v mechanice 337
Komentáře a průvodce literaturou 343
Literatura 345
Seznam základních označení 350
Rejstřík 353