

# OBSAH

Předmluva autorova .....	11
Předmluva k druhému vydání .....	12
Úvod a stručný přehled .....	13

## 1 ● KAPITOLA. PŘÍKLADY ÚLOH O CHARAKTERISTICKÝCH HODNOTÁCH Z TECHNICKÉ MECHANIKY .....

15

### 1. Problémy stability

1.1. Vzpěr prutu; prut vetknutý — volný .....	15
1.2. Vzpěr prutu vetknutého — kloubově uloženého .....	18
1.3. Vzpěr prutu se zřetelem k jeho vlastní váze .....	19
1.4. Vzpěra uložená na pružném podkladě .....	20
1.5. Vybočení nosníku namáhaného ohybem .....	21
1.6. Torze a vybočení nosníků s průřezem $\Gamma$ .....	23
1.7. Hřídel namáhaný tlakem a torzí .....	24
1.8. Vzpěr kruhového oblouku .....	25

### 2. Problémy kmitání

2.1. Kmity volně zavěšeného lana .....	28
2.2. Torzní kmity prutů .....	30
2.3. Ohybové kmity prutu .....	31
2.4. Příklad fyzikálního problému se zápornými charakteristickými hodnotami .....	33
2.5. Kmitání prutu se zřetelem k jeho váze .....	35
2.6. Kritické otáčky hřídelů s gyroskopickými účinky .....	36
2.7. Torzní kmity kotoučů .....	38

### 3. Doplnky

3.1. Problémy charakteristických hodnot v souvislosti s tzv. „rozvětvěním“ .....	40
3.2. Soustavy diferenciálních rovnic .....	41
3.3. Jiné okrajové podmínky; vztahy mezi hodnotami na obou koncích intervalu .....	43
3.4. Problémy charakteristických hodnot u parciálních diferenciálních rovnic .....	43
3.5. Smíšené cvičební úlohy k I. kapitole .....	45

## 2 ● KAPITOLA. MATEMATICKÉ POMOČNÉ PROSTŘEDKY

4. Základní poznatky o problémech charakteristických hodnot .....	52
4.1. Příklady různých jevů při problémech charakteristických hodnot .....	52
4.2. Označení .....	58
4.3. Pojem „samoadjungovaný“ .....	61
4.4. Zobecněná ortogonalita .....	63
4.5. Reálnost charakteristických hodnot .....	65
4.6. Dirichletova formule .....	67
4.7. Problémy třídy $G$ .....	68
4.8. Příklad samoadjungovaného problému s nereálnými charakteristickými hodnotami .....	69
4.9. Definitní problémy charakteristických hodnot .....	70
5. Greenova funkce u obyčejných diferenciálních rovnic	
5.1. Definice Greenovy funkce .....	73
5.2. Důkaz vzorce pro řešení okrajové úlohy .....	75
5.3. Konstrukce Greenovy funkce z fundamentálního systému .....	76
5.4. Symetrie Greenovy funkce pro samoadjungované okrajové úlohy .....	80
5.5. Jednoduché příklady Greenových funkcí .....	84
5.6. Greenova rezolventa pro necharakteristické hodnoty .....	85
5.7. Podmínka pro charakteristické hodnoty .....	85
5.8. Chování Greenovy rezolventy v bodě charakteristické hodnoty $\lambda$ .....	88
5.9. Vícenásobné charakteristické hodnoty .....	90
5.10. Semidefinitní úlohy o charakteristických hodnotách .....	93
6. Greenova funkce u parciálních diferenciálních rovnic	
6.1. Základní pojmy .....	94
6.2. Speciální třída problémů .....	95
6.3. Greenova funkce, předběžné poznámky .....	98
6.4. Řešení okrajové úlohy pomocí Greenovy funkce .....	99
6.5. Jiné typy parciálních diferenciálních rovnic .....	101
7. Vztahy k integrálním rovnicím	
7.1. Problémy třídy $G$ a integrální rovnice .....	102
7.2. Výsledky z teorie integrálních rovnic .....	105
7.3. Aplikace na problémy třídy $G$ .....	108
7.4. Integrální rovnice a parciální diferenciální rovnice .....	110
7.5. Problémy třídy $G$ a Volterrovy integrální rovnice .....	112
7.6. Příklad .....	116
7.7. Asymptotické rozložení charakteristických hodnot .....	117
7.8. Smíšené cvičební úlohy k II. kapitole .....	121

## 3 ● KAPITOLA. KRÁTKÝ NÁSTIN MATEMATICKÉ TEORIE

8. Minimalizující vlastnosti charakteristických hodnot	
8.1. Minimalizující vlastnost nejmenší charakteristické hodnoty .....	128
8.2. Provedení důkazu .....	129

8.3. Minimalizující vlastnosti vyšších charakteristických hodnot .....	132
8.4. Courantův princip maxima-minima .....	135
8.5. Srovnávací věta .....	137
<b>9. Věta o odhadu</b>	
9.1. Formulace věty .....	138
9.2. Příklad k větě o odhadu .....	140
9.3. Důkaz věty o odhadu .....	142
9.4. Srovnání s problémy řešitelnými v uzavřeném tvaru .....	143
<b>10. Věta o rozvoji</b>	
10.1. Předběžné poznámky .....	144
10.2. Fourierovy koeficienty .....	145
10.3. Parsevalova formule .....	146
10.4. Pomocná věta o jistých řadách s charakteristickými funkcemi .....	149
10.5. Konvergence Fourierovy řady .....	151
10.6. Věta o rozvoji. Důkaz v případě $n = 0$ .....	152
10.7. Pomocná úvaha .....	154
10.8. Věta o rozvoji, závěr důkazu pro $n > 0$ .....	155
<b>11. Doplnky</b>	
11.1. Elementární důkaz minimalizujících vlastností u rovnic 2. řádu .....	156
11.2. Minimalizující vlastnosti charakteristických hodnot u parciálních diferenciálních rovnic .....	162
11.3. Dvojparametrické problémy charakteristických hodnot; křivky charakteristických hodnot .....	166
11.4. Smíšené cvičební úlohy k III. kapitole .....	167

#### 4 ● KAPITOLA. METODA POSTUPNÝCH APROXIMACÍ

<b>12. Schwarzovy konstanty</b>	
12.1. Metoda postupných aproximací ve všeobecném případě .....	172
12.2. Zavedení Schwarzových konstant $a_k$ a kvocientů $\mu_k$ .....	173
12.3. Veličiny $\mu_k$ tvoří monotónně nerostoucí posloupnost .....	177
12.4. Dolní odhad první charakteristické hodnoty .....	178
12.5. Postup při praktickém provádění metody .....	181
12.6. Příklady k numerickému provádění metody .....	183
<b>13. Grafická integrace</b>	
13.1. Jednoduchá grafická integrace .....	186
13.2. Proměnná pólová distance .....	189
13.3. Dvojnásobná grafická integrace .....	191
13.4. Zvláštní případ obyčejného vláknového polygonu .....	193
13.5. Připojení okrajových podmínek .....	193
13.6. Grafické provedení metody postupných aproximací .....	195
13.7. Grafické určení hodnoty $\mu_1$ .....	197

## 14. Doplnky

14.1. Metoda postupných aproximací u parciálních diferenciálních rovnic	200
14.2. Krylovova-Bogoljubovova věta pro problémy třídy $G$	202
14.3. Důkaz hlavní formule (12.19) pomocí věty o rozvoji	205
14.4. Konvergence iterační metody u okrajových úloh	208
14.5. Kochova metoda pro vyšší charakteristické hodnoty	210
14.6. Smíšené cvičební úlohy ke IV. kapitole	210

## 5 ● KAPITOLA. NUMERICKÉ ZPRACOVÁNÍ MINIMALIZUJÍCÍCH VLASTNOSTÍ

### 15. Základy Ritzovy metody

15.1. Tři principy minima	217
15.2. Obecná Ritzova metoda	220
15.3. Galerkinovy rovnice	221
15.4. Převedení na sekulární rovnici	223
15.5. Lineární předpoklad u Kamkeova principu minima	227
15.6. Grammelovy rovnice	228
15.7. Numerické příklady	230
15.8. Vyšší aproximace podle Ritzovy metody	233

### 16. Další poznámky k Ritzově metodě

16.1. Eulerovy rovnice variačního počtu	335
16.2. Příklad. Problém charakteristických hodnot	339
16.3. Obrácená formule otázky a Ritzova metoda	340
16.4. Metoda energie při úlohách o kmitání	241
16.5. Ohybové kmity	242
16.6. Příklad. Torzní kmity	244
16.7. Metoda energie u parciálních diferenciálních rovnic	247
16.8. Problémy stability	249
16.9. Grafické provedení Ritzovy metody	250
16.10. Grafická konstrukce Grammelových rovnic	251
16.11. Smíšené cvičební úlohy k V. kapitole	254

## 6 ● KAPITOLA. ÚLOHY O CHARAKTERISTICKÝCH HODNOTÁCH U MATIC

### 17. Základní fakta o problémech charakteristických hodnot u matic

17.1. Označení	262
17.2. Matice se speciálními vlastnostmi	263
17.3. Kvadratické a hermiteovské formy	265
17.4. Reálná charakteristická čísla	270
17.5. Zobecněná unitárnost charakteristických vektorů	272
17.6. Příklady mezistupňových úloh z mechaniky	273
17.7. Příklady obecných problémů charakteristických hodnot z mechaniky	280
17.8. Hermiteovská samoadjungovanost u integro-diferenciálních rovnic	287

18. Extremální vlastnosti charakteristických čísel	
18.1. Definice charakteristických čísel pomocí problémů maxima	291
18.2. Provedení transformace k hlavním osám	293
18.3. Důsledky a odhady	296
18.4. Simultánní transformace k hlavním osám dvou hermiteovských forem	298
18.5. Příklad: Geometrický význam charakteristických vektorů dvou kvadratických forem	302
18.6. Courantův princip maxima-minima	304
18.7. Věta o odhadu	306
18.8. Numerické použití věty o odhadu	308
19. Iterační metoda a hlavní vektory	
19.1. Iterační metoda v obecném případě	310
19.2. Horní a dolní odhady charakteristických čísel	315
19.3. Snížení řádu	318
19.4. Numerický příklad	320
19.5. Zavedení hlavních vektorů	324
19.6. Důkaz věty o rozvoji	326
19.7. Konvergence iterační metody u speciálních problémů charakteristických hodnot	327
19.8. Důsledky o mocninách matice	328
19.9. Soustavy obyčejných lineárních diferenciálních rovnic	330
19.10. Konstantní koeficienty a hlavní vektory	333
20. Doplnky	
20.1. Maticové polynomy a Cayleyova rovnice	335
20.2. Maticové funkce a maticové potenční řady	338
20.3. Přibližná řešení soustav lineárních rovnic	341
20.4. Odhady pro charakteristická čísla matic	343
20.5. Zvláštní metody k sestavení charakteristické rovnice	348
20.6. Smíšené cvičební úlohy k VI. kapitole	350

## 7 ● KAPITOLA. METODA DIFERENCÍ

21. Metoda diferencí pro první aproximaci u obyčejných diferenciálních rovnic	
21.1. Popis metody diferencí	356
21.2. Příklad u diferenciální rovnice 2. řádu	358
21.3. Příklad diferenciální rovnice 4. řádu	360
21.4. Přímé přibližné řešení diferenčních rovnic	362
21.5. Minimalizující vlastnost nejmenší diferenční charakteristické hodnoty	364
22. Některá zlepšení metody diferencí	
22.1. Finitní výrazy	366
22.2. Metoda diferencí pro vyšší aproximaci	368
22.3. Příklad na metodu diferencí pro vyšší aproximaci	369
22.4. Formule pro přesnější aproximace	370
22.5. Příklad	373
22.6. Postup v obecném případě	374

## 23. Metoda diferencí u parciálních diferenciálních rovnic

23.1. Obyčejná metoda diferencí neboli metoda první aproximace .....	376
23.2. Příklad. Vlastní kmity eliptické membrány .....	378
23.3. Metoda diferencí pro vyšší aproximace .....	379
23.4. Přesnější aproximace .....	381
23.5. Příklady: Kmitání membrány .....	384
23.6. Smíšené cvičební úlohy k VII. kapitole .....	391

## 8 ● KAPITOLA. RŮZNÉ JINÉ METODY

### 24. Poruchový počet

24.1. Popis metody .....	400
24.2. Vícenásobné charakteristické hodnoty .....	404
24.3. Souvislost s Rayleighovým principem .....	406
24.4. Příklad k poruchovému počtu. Vzpěr těžkých tyčí .....	408

### 25. Další metody

25.1. Dunkerleyova formule pro složené systémy .....	410
25.2. Southwellova formule .....	411
25.3. Minimum střední kvadratické odchylky .....	412
25.4. Kolokace .....	413
25.5. Rozvoj v řetězový zlomek. Mathieuova diferenciální rovnice .....	416
25.6. Charakteristické funkce ve tvaru nekonečných řad .....	419
25.7. Smíšené cvičební úlohy k VIII. kapitole .....	420

Seznam vyšetřovaných příkladů .....	429
-------------------------------------	-----

Tabulka I. Jednoduché příklady z technické praxe na problémy charakteristických hodnot u obyčejných diferenciálních rovnic .....	434
Tabulka II. Jednoduché příklady z technické praxe na problémy charakteristických hodnot u parciálních diferenciálních rovnic .....	449
Tabulka III. Dirichletovy okrajové části .....	451
Tabulka IV. Jednoduché příklady Greenových funkcí .....	452
Tabulka V. Některé problémy charakteristických hodnot s rovnicemi 2. řádu řešitelné v uzavřeném tvaru .....	454
Tabulka VI. Transcendentní rovnice pro charakteristické hodnoty u nejjednodušších problémů .....	458
Tabulka VII. Příklady grafického provedení metody postupných aproximací .....	464
Tabulka VIII. Příklady matic se zvláštními vlastnostmi .....	466
Tabulka IX. Příklady matic s různými (hrubými) odhady charakteristických čísel .....	470
Tabulka X. Přehledné srovnání problémů charakteristických hodnot u matic a u diferenciálních a integrálních rovnic .....	472
Tabulka XI. Výrazy pro metodu diferencí u obyčejných diferenciálních kvocientů .....	478
Tabulka XII. Výrazy pro operátory $\Delta$ a $\Delta\Delta$ u metody diferencí .....	480
Tabulka XIII. Výsledky metody diferencí u kosočtverečné membrány z odst. 23.5 .....	482
Tabulka XIV. Výsledky metody diferencí pro trojúhelníkovou membránu z odst. 23.5 .....	484
Tabulka XV. Spektra mřížkových oborů až k počtu $N = 6$ vnitřních mřížkových bodů. ...	485
Další literatura .....	487