OBSAH

PŘEDMLUVA 11

PŘEDMLUVA K ČESKÉMU VYDÁNÍ 13

ZKRATKY 14

I • ZÁKLADY FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY S APLIKACEMI 17

§ 1. Typické problémy numerické matematiky 17

1.1 Některé všeobecné pojmy 17
1.2 Řešení rovnic 18
1.3 Vyšetřování vlastností řešení rovnic 21
1.4 Úlohy o extérmu s vedlejšími podmínkami nebo bez nich 22
1.5 Úlohy o reprezentaci (určování koeficientů) 24
1.6 Vyčíslování 27

§ 2. Některé typy prostorů 28

2.1 Hölderova a Minkowského nerovnost 28
2.2 Topologický prostor 30
2.3 Kvazimetrické a metrické prostory 33
2.4 Lineární prostory 38
2.5 Normované prostory 40
2.6 Unitární prostory a Schwarzova nerovnost 43
2.7 Rovnoběžníková rovnost 45
2.8 Ortogonalita v unitárních prostorech, Besselova nerovnost 50

§ 3. Uspořádání 53

3.1 Částečné uspořádání a úplné uspořádání 53
3.2 Svazy 56
3.3 Pseudometrické prostory 57

§ 4. Konvergence a úplnost 58

4.1 Konvergence v pseudometrickém prostoru 58
4.2 Cauchyovské posloupnosti 60

4.3 Úplnost, Hilbertovy a Banachovy prostory 61
4.4 Některé věty o spojitosti 66
4.5 Jednoduché důsledky pro Hilbertův prostor; podprostory 67
4.6 Úplné ortonormální systémy v Hilbertových prostorech 70
4.7 Příklady 73
4.8 Slabá konvergence 78

§ 5. Kompaktnost 79

5.1 Kompaktní a v sobě kompaktní množiny 79
5.2 Příklady na kompaktnost 80
5.3 Arzelova věta 82
5.4 V sobě kompaktní množiny funkcí vytvořené integrálními operátory 85

§ 6. Operátory v pseudometrických a speciálnějších prostorech 87

6.1 Lineární a omezené operátory 87
6.2 Skládání operátorů 90
6.3 Inverzní operátor 92
6.4 Příklady operátorů 94
6.5 Inverzní operátory blízkých operátorů 98
6.6 Stav lineárního omezeného operátoru 99
6.7 Odhad chyby pro iterační metodu 100
6.8 Rieszova věta a slabá kompaktnost 101
6.9 Banachova věta o posloupnostech operátorů 103
6.10 Užití na vzorce pro kvadraturu 105

§ 7. Operátory v Hilbertových prostorech 107

7.1 Adjungovaný operátor 107
7.2 Příklady 110
7.3 Diferenciální operátory funkcí jedné proměnné 114
7.4 Diferenciální operátory funkcí více proměnných 116
7.5 Úplně spojité operátory 112
7.6 Úplně spojité integrální operátory 122
7.7 Odhady zbytkových členů pro holomorfní funkce 123
7.8 Odhady chyb ve vzorcích pro kvadraturu bez užití derivací 125
7.9 Základní princip variačního počtu 128

§ 8. Úlohy o vlastních hodnotách 130

8.1 Obecné úlohy o vlastních hodnotách 130
8.2 Spektrum operátoru v lineárním metrickém prostoru 134
8.3 Věta o odhadu pro vlastní hodnoty 135
8.4 Projektory 138
8.5 Extremalizující vlastnosti vlastních hodnot 141
8.6 Dva principy minima pro diferenciální rovnice 147
8.7 Ritzova metoda 150

§ 9. Vektorové normy a maticové normy 156

9.1 Vektorové normy 156
9.2 Srovnání různých vektorových norem 157

9.3 Maticové normy 159
9.4 Z teorie matic 161
9.5 Euklidovská vektorová norma a s ní kompatibilní maticové normy 163
9.6 Jiné vektorové normy a jim podřízené maticové normy 166
9.7 Transformované normy 168

§ 10. Další věty o vektorových a maticových normách 169

10.1 Duální vektorové normy 169
10.2 Určení některých duálních norem 171
10.3 Mocniny matic 172
10.4 Jedna minimalizující vlastnost spektrální normy 173
10.5 Odchylka matice od normality 174
10.6 Spektrální variace dvou matic 177
10.7 Smíšené úlohy ke kapitole I 181
10.8 Návody k řešení některých úloh odst. 10.7 183

II • ITERAČNÍ METODY 188

§ 11. Věta o pevném bodě pro obecnou iterační metodu v pseudometrických prostorech. . 188

11.1 Iterační metoda a jednoduché příklady 188
11.2 Iterační metody pro diferenciální rovnice 190
11.3 Obecná věta o pevném bodě 193
11.4 Důkaz obecné věty o pevném bodě 194
11.5 Věta o jednoznačnosti 196

§ 12. Speciální případy věty o pevném bodě a změna operátoru 197

12.1 Speciální případ: Pomocný operátor P je lineární 197
12.2 Speciální případ: Prostor R je metrický a operátor P je lineární 199
12.3 Speciální případ: Prostor R je metrický a operátor P je nelineární reálná funkce 201
12.4 Provedení iterací s upraveným operátorem a otázky přesnosti 202
12.5 Odhad chyby při upravené iteraci 205

§ 13. Iterační metody pro systémy rovnic. 207

13.1 Jedna rovnice 207
13.2 Různé iterační metody pro systémy rovnic 208
13.3 Některá kritéria konvergence pro systémy lineárních rovnic 209
13.4 Kritérium řádkových součtů a kritérium sloupcových součtů 212

§ 14. Systémy rovnic a metoda diferencí 216

14.1 Metoda diferencí u eliptických diferenciálních rovnic 216
14.2 Odhad chyby pro iteraci po krocích v celku a pro iteraci po krocích v komponentách 218
14.3 Skupinová iterace 221
14.4 Nekonečné systémy lineárních rovnic. 222
14.5 Odhad chyby při relaxaci 223
14.6 Volba relaxačního koeficientu 227
14.7 Metoda střídání směrů 229

§ 15. Iterační metody u diferenciálních a integrálních rovnic 232

15.1 Nelineární okrajové úlohy 232
15.2 Nelineární obyčejné diferenciální rovnice 236
15.3 Integrální rovnice 238
15.4 Systémy hyperbolických diferenciálních rovnic 240
15.5 Odhad chyb u hyperbolických systémů 244

§ 16. Derivace operátorů v supermetrických prostorech 246

16.1 Fréchetova derivace 246
16.2 Vyšší derivace 248
16.3 Fréchetova derivace složených operátorů 250
16.4 Základní příklady tvoření derivací 251
16.5 L-metrické prostory 255
16.6 Věta o přírůstku a Taylorův vzorec 257

§ 17. Konstrukce iterací 259

17.1 Obyčejná a zjednodušená Newtonova metoda 259
17.2 Odhad chyby pro zjednodušenou Newtonovu metodu 262
17.3 Zjednodušená Newtonova metoda u nelineárních okrajových úloh 264
17.4 Řád iterace 266
17.5 Iterační metody pro určení nulových bodů (i vícenásobných) holomorfních funkcí 268
17.6 Obecná iterace k-tého řádu pro řešení operátorové rovnice $Tu = \Theta$ 270
17.7 Poznámka o početních nárocích u iterací vyšších řádů 273

§ 18. Regula falsi 274

18.1 Primitivní forma a normální forma metody regula falsi 274
18.2 Primitivní forma metody regula falsi pro reálné funkce reálné proměnné . . . 275
18.3 Metoda regula falsi pro operátorové rovnice 277
18.4 Rozšíření metody regula falsi 279
18.5 Poměrné diference operátoru a Newtonův interpolační polynom 280
18.6 Konvergence iterace získané metodou regula falsi pro reálné funkce reálné proměnné 282
18.7 Obecnější metody a příklady 286

§ 19. Zpřesněná Newtonova metoda 287

19.1 Zpřesněná Newtonova metoda a základní majorizující funkce 287
19.2 Obecná věta o konvergenci iterací pro zpřesněné Newtonovy metody 289
19.3 Všeobecné poznámky k použití Newtonovy metody 293
19.4 Newtonova metoda v úlohách o vlastních hodnotách 295
19.5 Newtonova metoda v úlohách o aproximaci 298

§ 20. Monotonie a extremální principy u Newtonovy metody 302

20.1 Třída problémů, konvexní a konkávní operátory 302
20.2 Monotonie při Newtonově metodě 304
20.3 Extremální principy a věta o odhadu 306
20.4 Příklady nelineárních okrajových úloh 308

20.5 Vyšetřování konvergence 309
20.6 Smíšené úlohy ke kapitole II 311
20.7 Návody k řešení 312

III • MONOTONIE, NEROVNOSTI A DALŠÍ OBLASTI 316

§ 21. Monotónní operátory 316

21.1 Definice a příklady 316
21.2 Monotónně rozložitelné operátory 318
21.3 Aplikace Schauderovy věty o pevném bodě 322
21.4 Aplikace Schauderovy věty na nelineární diferenciální rovnice 323
21.5 Aplikace na systémy reálných lineárních rovnic 325

§ 22. Další aplikace Schauderovy věty 327

22.1 Extrapolace s odhadem chyby pro monotónní posloupnost iterací 327
22.2 Aplikace na systémy lineárních rovnic 331
22.3 Aplikace na lineární diferenciální rovnice 333
22.4 Další věta o monotonii 334
22.5 Aplikace na nelineární integrální rovnice 335

§ 23. Neklesající charakter u matic a u okrajových úloh 338

23.1 Matice neklesajícího charakteru 338
23.2 Neklesající charakter u lineárních okrajových úloh s obyčejnými diferenciálními rovnicemi 342
23.3 Věta o maximu u nelineárních eliptických diferenciálních rovnic 344
23.4 Neklesající charakter u nelineárních eliptických diferenciálních rovnic 348
23.5 Speciální případ: Lineární eliptická diferenciální rovnice 350

§ 24. Úlohy s počátečními podmínkami a další věty o monotonii 352

24.1 Ryzí monotonie u parabolických rovnic 352
24.2 Obecná věta o monotonii 354
24.3 Nelineární hyperbolické diferenciální rovnice 357
24.4 Majorizace Greenovy funkce a nelineární okrajové úlohy 361

§ 25. Aproximace funkcí 365

25.1 Problematika v otázkách aproximace 365
25.2 Lineární aproximace 368
25.3 Množina minimalizujících řešení při racionální aproximaci 369
25.4 Existenční věta pro racionální Čebyševovu aproximaci 370
25.5 Obecná věta o odhadu minimální odchylky 372
25.6 Systém nerovností 374
25.7 Aplikace 376
25.8 Racionální Čebyševova aproximace a úlohy o vlastních hodnotách 382

§ 26. Diskrétní Čebyševova aproximace a metoda výměn 384

26.1 Diskrétní Čebyševova aproximace 384
26.2 Reference a referenční odchylka 386

26.3 Centrum 388
26.4 Metoda výměn 389
26.5 Smíšené úlohy ke kapitole III 392
26.6 Návody k řešení 395

DODATEK: K SCHAUDEROVĚ VĚTĚ O PEVNÉM BODĚ 399

26.7 Pomocné věty o kompaktních množinách 399
26.8 Dvě verze Schauderovy věty o pevném bodě 402

Seznam literatury 405

Rejstřík 412