

# OBSAH

Předmluva	13
Předmluva k českému vydání	16
Úvod	17
<b>KAPITOLA 1. Přímé metody řešení diferenčních rovnic</b>	<b>29</b>
1. Síťové rovnice. Základní pojmy	29
1.1. Síť a síťové funkce	29
1.2. Náhrada derivací diferencemi a některé diferenční identity	32
1.3. Síťové a diferenční rovnice	35
1.4. Počáteční úloha a okrajové úlohy pro diferenční rovnice	38
2. Obecná teorie lineárních diferenčních rovnic	42
2.1. Vlastnosti řešení homogenní rovnice	42
2.2. Věty o řešeních lineární rovnice	44
2.3. Metoda variace konstant	46
2.4. Příklady	49
3. Řešení lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty	52
3.1. Charakteristická rovnice. Příklad jednoduchých kořenů	52
3.2. Příklad násobných kořenů	53
3.3. Příklady	56
4. Lineární diferenční rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty	59
4.1. Obecné řešení homogenní rovnice	59
4.2. Čebyševovy polynomy	61
4.3. Obecné řešení nehomogenní rovnice	64
5. Úlohy na vlastní čísla pro diferenční rovnice	67
5.1. První okrajová úloha na vlastní čísla	67
5.2. Druhá okrajová úloha	69
5.3. Smíšená okrajová úloha	71
5.4. Periodická okrajová úloha	73
<b>KAPITOLA 2. Metoda faktorizace</b>	<b>78</b>
1. Metoda faktorizace pro diferenční rovnice druhého řádu	78
1.1. Algoritmus metody	78

1.2. Metoda složené faktorizace	81
1.3. Předpoklady pro metodu faktorizace	83
1.4. Příklady použití metody faktorizace	86
2. Varianty metody faktorizace	89
2.1. Varianta metody faktorizace s výpočtem diferencí	89
2.2. Metoda cyklické faktorizace	92
2.3. Metoda faktorizace pro složité soustavy	96
2.4. Metoda nemonotónní faktorizace	100
3. Metoda faktorizace pro diferenční rovnice čtvrtého řádu	103
3.1. Algoritmus monotónní faktorizace	103
3.2. Předpoklady pro metodu	106
3.3. Varianta nemonotónní faktorizace	108
4. Metoda maticové faktorizace	110
4.1. Soustavy vektorových rovnic	110
4.2. Faktorizace pro vektorové diferenční rovnice druhého řádu	114
4.3. Faktorizace pro vektorové diferenční rovnice prvního řádu	117
4.4. Ortogonální faktorizace pro vektorové diferenční rovnice prvního řádu	119
4.5. Faktorizace pro diferenční rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty	123
<b>KAPITOLA 3. Metoda cyklické redukce</b>	<b>128</b>
1. Okrajové úlohy pro vektorové diferenční rovnice druhého řádu	128
1.1. Formulace okrajových úloh	128
1.2. První okrajová úloha	130
1.3. Další okrajové úlohy pro diferenční rovnice	132
1.4. Diferenční schéma zvýšeného řádu přesnosti pro Dirichletovu úlohu	135
2. Metoda cyklické redukce pro první okrajovou úlohu	137
2.1. Proces eliminace lichých a sudých neznámých	137
2.2. Transformace pravé strany a řešení soustav	139
2.3. Algoritmus metody	143
2.4. Jiný algoritmus metody	145
3. Příklady použití metody	150
3.1. Dirichletova úloha pro diferenční Poissonovu rovnici na obdélníku	150
3.2. Diferenční schéma zvýšeného řádu přesnosti pro Dirichletovu úlohu	152
4. Metoda cyklické redukce pro ostatní okrajové úlohy	155
4.1. Druhá okrajová úloha	155
4.2. Periodická úloha	160
4.3. Třetí okrajová úloha	163
<b>KAPITOLA 4. Metoda separace proměnných</b>	<b>171</b>
1. Algoritmus diskrétní Fourierovy transformace	171
1.1. Formulace úlohy	171
1.2. Rozvoj podle sínů a sínů s posunutým argumentem	175
1.3. Rozvoj podle kosinů	182
1.4. Transformace reálné periodické síťové funkce	184
1.5. Transformace komplexní periodické síťové funkce	189

2. Fourierova metoda řešení okrajových úloh pro diferenciální rovnice	191
2.1. Úlohy na vlastní čísla pro diferenciální Laplaceův operátor na obdélníku	191
2.2. Poissonova rovnice na obdélníku. Rozvoj do dvojné řady	195
2.3. Rozvoj do jednoduché řady	198
3. Metoda neúplné redukce	203
3.1. Kombinace Fourierovy metody a metody redukce	203
3.2. Řešení okrajových úloh pro Poissonovu rovnici na obdélníku	209
3.3. Diferenční schéma zvýšeného řádu přesnosti pro Dirichletovu úlohu na obdélníku	212
<b>KAPITOLA 5. Teorie iteračních metod</b>	<b>217</b>
1. Některé pojmy a věty z funkcionální analýzy	217
1.1. Lineární prostory	217
1.2. Operátory v normovaných lineárních prostorech	220
1.3. Operátory v Hilbertově prostoru	223
1.4. Funkce ohraničeného operátoru	228
1.5. Operátory v prostoru konečné dimenze	229
1.6. Řešitelnost operátorových rovnic	231
2. Diferenční schémata jako operátorové rovnice	233
2.1. Příklady prostorů síťových funkcí	233
2.2. Některé diferenciální identity	236
2.3. Hranice nejjednodušších diferenciálních operátorů	239
2.4. Dolní odhady pro některé diferenciální operátory	241
2.5. Horní odhady pro diferenciální operátory	250
2.6. Diferenční schémata jako operátorové rovnice v abstraktních prostorech	251
2.7. Diferenční schémata pro eliptické rovnice s konstantními koeficienty	255
2.8. Rovnice s proměnnými koeficienty a se smíšenými derivacemi	257
3. Základní pojmy teorie iteračních metod	261
3.1. Metoda stacionarizace	261
3.2. Iterační schémata	263
3.3. Konvergence a počet iterací	265
3.4. Klasifikace iteračních metod	266
<b>KAPITOLA 6. Jednokrokové iterační metody</b>	<b>270</b>
1. Formulace úlohy o volbě iteračních parametrů	270
1.1. Výchozí soubor iteračních schémat	270
1.2. Úloha pro chybu	271
1.3. Samoadjungovaný případ	272
2. Jednokroková metoda Čebyševova typu	273
2.1. Konstrukce souboru iteračních parametrů	273
2.2. O nezlepšitelnosti apriorního odhadu	275
2.3. Příklady volby operátoru $D$	276
2.4. O numerické stabilitě metody	279
2.5. Konstrukce optimální posloupnosti iteračních parametrů	284
3. Metoda prosté iterace	288
3.1. Volba iteračního parametru	288
3.2. Odhad normy operátoru přechodu	290

4. Nesamoadjungovaný případ. Metoda prosté iterace	291
4.1. Formulace úlohy	291
4.2. Minimalizace normy operátoru přechodu	292
4.3. Minimalizace normy operátoru $S^n$	298
4.4. Metoda symetrizace rovnice	303
5. Příklady použití iteračních metod	303
5.1. Dirichletova úloha pro diferenční Poissonovu rovnici na obdélníku	303
5.2. Dirichletova úloha pro diferenční Poissonovu rovnici na obecné oblasti	307
5.3. Dirichletova úloha pro diferenční eliptickou rovnici s proměnnými koeficienty	312
5.4. Dirichletova úloha pro obecnou diferenční eliptickou rovnici v divergentním tvaru	318
<b>KAPITOLA 7. Dvukrokové iterační metody</b>	<b>320</b>
1. Odhad rychlosti konvergence	320
1.1. Výchozí soubor iteračních schémat	320
1.2. Odhad normy chyby	321
2. Semiiterační Čebyševova metoda	323
2.1. Vzorce pro iterační parametry	323
2.2. Příklady volby operátoru $D$	326
2.3. Algoritmus metody	326
3. Stacionární dvoukroková metoda	327
3.1. Volba iteračních parametrů	327
3.2. Odhad rychlosti konvergence	327
4. Stabilita jednokrokových a dvoukrokových metod vzhledem k apriorní informaci	330
4.1. Formulace úlohy	330
4.2. Odhady rychlosti konvergence metod	331
<b>KAPITOLA 8. Iterační metody variačního typu</b>	<b>337</b>
1. Jednokrokové gradientní metody	337
1.1. Formulace úlohy o volbě iteračních parametrů	337
1.2. Vzorec pro iterační parametry	339
1.3. Odhad rychlosti konvergence	340
1.4. Nelepšitelnost odhadu v samoadjungovaném případě	342
1.5. Asymptotická vlastnost gradientních metod v samoadjungovaném případě	344
2. Příklady jednokrokových gradientních metod	346
2.1. Metoda největšího spádu	346
2.2. Metoda minimálních reziduí	347
2.3. Metoda minimálních korekcí	349
2.4. Metoda minimálních chyb	350
2.5. Příklad použití jednokrokových metod	351
3. Dvukrokové metody sdružených směrů	353
3.1. Formulace úlohy o volbě iteračních parametrů. Odhad rychlosti konvergence	353
3.2. Vzorce pro iterační parametry. Dvukrokové iterační schéma	355
3.3. Varianty vzorců pro výpočet	359
4. Příklady dvoukrokových metod	361
4.1. Speciální případy metod sdružených směrů	361
4.2. Lokálně optimální dvoukrokové metody	362

5. Urychlování konvergence jedнокrokových metod v samoadjungovaném případě	366
5.1. Algoritmus urychlovacího procesu	366
5.2. Odhad efektivity	368
5.3. Příklad	369
<b>KAPITOLA 9. Stacionární iterační metody trojúhelníkového typu</b>	<b>372</b>
1. Gaussova–Seidelova metoda	372
1.1. Iterační schéma metody	372
1.2. Příklady použití metody	375
1.3. Postačující podmínky pro konvergenci	378
2. Metoda superrelaxace	381
2.1. Iterační schéma. Postačující podmínky pro konvergenci	381
2.2. Formulace úlohy o volbě iteračního parametru	382
2.3. Odhad spektrálního poloměru	385
2.4. Dirichletova úloha pro diferenční Poissonovu rovnici na obdélníku	387
2.5. Dirichletova úloha pro diferenční eliptickou rovnici s proměnnými koeficienty	392
3. Obecné metody trojúhelníkového typu	394
3.1. Iterační schéma	394
3.2. Odhad rychlosti konvergence	396
3.3. Volba iteračního parametru	397
3.4. Odhad rychlosti konvergence Gaussovy–Seidelovy metody a superrelaxace	398
<b>KAPITOLA 10. Nestacionární metoda trojúhelníkového typu</b>	<b>402</b>
1. Obecná teorie metody	402
1.1. Iterační schéma	402
1.2. Volba iteračních parametrů	404
1.3. Metoda pro stanovení výchozích hodnot $\delta$ a $\Delta$	407
1.4. Dirichletova úloha pro diferenční Poissonovu rovnici na obdélníku	409
2. Okrajové úlohy pro diferenční eliptické rovnice na obdélníku	416
2.1. Dirichletova úloha pro rovnici s proměnnými koeficienty	416
2.2. Modifikovaná nestacionární metoda trojúhelníkového typu	418
2.3. Porovnání variant metody	424
2.4. Třetí okrajová úloha	425
2.5. Dirichletova úloha pro obecnou diferenční rovnici v divergentním tvaru	427
3. Nestacionární metoda trojúhelníkového typu pro eliptické rovnice na obecné oblasti	430
3.1. Odvození diferenčního schématu	430
3.2. Konstrukce iterační metody	431
3.3. Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici na obecné oblasti	435
<b>KAPITOLA 11. Metoda střídavých směrů</b>	<b>439</b>
1. Metoda střídavých směrů v komutativním případě	439
1.1. Iterační schéma metody	439
1.2. Formulace úlohy o volbě parametrů	441
1.3. Transformace lineární lomenou funkcí	443
1.4. Optimální soubor parametrů	445

## Obsah

2. Příklady použití metody	448
2.1. Dirichletova úloha pro diferenční Poissonovu rovnici na obdélníku	448
2.2. Třetí okrajová úloha pro eliptickou rovnici se separovatelnými proměnnými	452
2.3. Diferenční schéma zvýšeného řádu přesnosti pro Dirichletovu úlohu	457
3. Metoda střídavých směrů v obecném případě	460
3.1. Příklad nekomutujících operátorů	460
3.2. Dirichletova úloha pro diferenční eliptickou rovnici s proměnnými koeficienty	463
<b>KAPITOLA 12. Metody pro řešení rovnic s indefinitními a singulárními operátory</b>	<b>467</b>
1. Rovnice s indefinitním operátorem v reálném prostoru	467
1.1. Iterační schéma. Úloha o volbě iteračních parametrů	467
1.2. Transformace operátoru v samoadjungovaném případě	470
1.3. Iterační metoda Čebyševova typu	472
1.4. Iterační metody variačního typu	475
1.5. Příklad	477
2. Rovnice s operátorem v komplexním prostoru	479
2.1. Metoda prosté iterace	479
2.2. Metoda střídavých směrů	482
3. Obecné iterační metody pro rovnice se singulárním operátorem	486
3.1. Iterační schémata v případě regulárního operátoru $B$	486
3.2. Iterační metoda minimálních reziduí	489
3.3. Metoda s parametry Čebyševova typu	492
4. Speciální metody	497
4.1. Neumannova úloha pro diferenční Poissonovu rovnici na obdélníku	497
4.2. Přímá metoda pro Neumannovu úlohu	500
4.3. Iterační schémata se singulárním operátorem $B$	502
<b>KAPITOLA 13. Iterační metody řešení nelineárních rovnic</b>	<b>507</b>
1. Iterační metody. Obecná teorie	507
1.1. Metoda prosté iterace pro rovnice s monotónním operátorem	507
1.2. Iterační metody pro případ diferencovatelného operátoru	510
1.3. Newtonova–Kantorovičova metoda	512
1.4. Dvoustupňové iterační metody	516
1.5. Jiné iterační metody	519
2. Metody pro nelineární diferenční schémata	521
2.1. Diferenční schéma pro jednorozměrnou eliptickou kvazilineární rovnici	521
2.2. Metoda prosté iterace	528
2.3. Iterační metody pro diferenční kvazilineární eliptické rovnice na obdélníku	530
2.4. Iterační metody pro slabě nelineární rovnice	535
<b>KAPITOLA 14. Příklady řešení síťových eliptických rovnic</b>	<b>537</b>
1. Metody pro sestavení implicitních iteračních schémat	537
1.1. Princip regularizace v obecné teorii iteračních metod	537
1.2. Iterační schémata s faktorizovaným operátorem	540
1.3. Metoda implicitního invertování operátoru $B$ (dvoustupňová metoda)	545

2. Soustavy eliptických rovnic	547
2.1. Dirichletova úloha pro soustavu eliptických rovnic v $p$ -rozměrném kvádru	547
2.2. Soustava rovnic teorie pružnosti	551
<b>KAPITOLA 15. Metody řešení eliptických rovnic v křivočarých ortogonálních souřadnicích</b>	<b>554</b>
1. Formulace okrajových úloh pro diferenciální rovnice	554
1.1. Eliptické rovnice v cylindrické soustavě souřadnic	554
1.2. Okrajové úlohy pro rovnice v cylindrické soustavě souřadnic	557
2. Diferenční schémata v cylindrické soustavě souřadnic	560
2.1. Diferenční schémata bez smíšených derivací v osově symetrickém případě	560
2.2. Přímé metody	564
2.3. Metoda střídavých směrů	565
2.4. Řešení rovnic zadaných na plášti válce	569
3. Diferenční schémata v polární soustavě souřadnic	573
3.1. Diferenční schémata pro rovnice na kruhu a mezikruží	573
3.2. Řešitelnost okrajových úloh pro diferenciální rovnice	575
3.3. Princip superpozice pro úlohu na kruhu	578
3.4. Přímé metody řešení rovnic na kruhu a mezikruží	579
3.5. Metoda střídavých směrů	581
3.6. Diferenční schémata na výseči mezikruží	584
3.7. Obecný případ s proměnnými koeficienty	586
<b>DODATEK. Sestrojení polynomu s nejmenší odchylkou od nuly</b>	<b>589</b>
Literatura	594
Rejstřík	595