

---

# Obsah

<b>Předmluva</b>	<b>v</b>
<b>Seznam označení</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Základní pojmy</b>	<b>1</b>
1.1 Matice a vektory . . . . .	1
1.2 Skalární součin, norma a ortogonalita . . . . .	8
1.3 Vektorové normy a standardní skalární součin . . . . .	11
1.4 Projekce a projektory . . . . .	14
1.5 Vzdálenost vektoru od podprostoru . . . . .	16
1.6 Matice jako lineární zobrazení . . . . .	18
1.7 Maticové normy . . . . .	20
1.8 Jordanova věta . . . . .	25
<b>2 Schurova věta</b>	<b>35</b>
2.1 Schurova věta . . . . .	35
2.2 Důsledky Schurovy věty . . . . .	39
2.3 Reálný Schurův rozklad . . . . .	44
2.4 Funkce matic . . . . .	47
<b>3 Ortogonální transformace a QR rozklady</b>	<b>53</b>
3.1 Givensovy rotace v $\mathbb{R}^n$ . . . . .	53
3.2 Householderovy reflexe v $\mathbb{R}^n$ . . . . .	57
3.3 Givensovy rotace v $\mathbb{C}^n$ . . . . .	59
3.4 Householderovy reflexe v $\mathbb{C}^n$ . . . . .	60
3.5 QR rozklad . . . . .	61
3.5.1 QR rozklad užitím Givensových rotací . . . . .	63
3.5.2 QR rozklad užitím Householderových reflexí . . . . .	65
3.5.3 QR rozklad a Gram-Schmidtův ortogonalizační proces . . . . .	66
3.5.4 Implementace Gram-Schmidtova procesu . . . . .	67
3.5.5 Numerická stabilita QR rozkladu . . . . .	70
3.5.6 Cena výpočtu Gram-Schmidtova procesu a QR rozkladu . . . . .	74
3.6 Arnoldiho algoritmus . . . . .	76
3.7 Řádkově orientovaný Gram-Schmidtův proces . . . . .	78
3.8 QR rozklad se sloupcovou pivotací . . . . .	80

3.8.1	Householderův QR rozklad se sloupcovou pivotací . . . . .	82
3.8.2	Gram-Schmidtův QR rozklad se sloupcovou pivotací . . . . .	83
<b>4</b>	<b>LU rozklad a jeho numerická analýza</b>	<b>89</b>
4.1	Prostá Gaussova eliminace a LU rozklad . . . . .	90
4.2	Gaussova eliminace s částečnou pivotací . . . . .	94
4.2.1	Maticový zápis Gaussovy eliminace s částečnou pivotací . . . . .	96
4.3	Numerická analýza Gaussovy eliminace . . . . .	98
4.3.1	Citlivost systému lineárních rovnic na změny vstupních dat . . . . .	98
4.3.2	Numerická stabilita Gaussovy eliminace s částečnou pivotací . . . . .	99
4.4	Choleského rozklad hermitovské pozitivně definitní matice . . . . .	101
4.5	Rozklady hermitovských indefinitních matic . . . . .	103
4.6	Zpětná stabilita Choleského rozkladu . . . . .	105
4.7	Iterační zpřesnění Gaussovy eliminace . . . . .	106
4.8	Výpočetní náklady Gaussovy eliminace . . . . .	107
4.9	Gaussova eliminace pro velké řídké úlohy . . . . .	108
4.9.1	Pivotace versus zaplnění . . . . .	108
4.9.2	Grafy a matice . . . . .	109
4.9.3	Základní výpočetní rozdíl mezi LU a Choleského rozkladem . . . . .	112
4.9.4	Software . . . . .	113
4.10	Srovnání LU a QR rozkladu pro řešení soustav rovnic . . . . .	113
4.11	Algoritmické zápisy LU faktorizace . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Singulární rozklad</b>	<b>121</b>
5.1	Motivace – spektrální rozklad matice . . . . .	121
5.2	Zavedení singulárního rozkladu a jeho vlastnosti . . . . .	123
5.2.1	Vztahy mezi spektrálními rozklady matic $A^*A$ a $AA^*$ . . . . .	123
5.2.2	Věty o singulárním rozkladu . . . . .	125
5.2.3	Výpočet singulárního rozkladu . . . . .	128
5.3	Použití singulárního rozkladu . . . . .	129
5.3.1	Inverze a pseudoinverze matice . . . . .	130
5.3.2	Normy a podmíněnost matice . . . . .	131
5.3.3	Aproximace maticí nižší hodnosti . . . . .	132
5.4	Jednoznačnost singulárního rozkladu . . . . .	135
5.5	Singulární rozklad normální matice . . . . .	136
5.6	Numerická hodnota matice . . . . .	137
5.6.1	Numerická hodnota matice bez použití SVD . . . . .	137
5.7	Použití SVD na kompresi dat . . . . .	140
5.8	Polární rozklad a exponenciální tvar čtvercové matice . . . . .	142
5.9	CS rozklad bloků unitární matice . . . . .	143
5.10	Vzdálenost mezi podprostory a kanonické úhly . . . . .	146
<b>6</b>	<b>Úlohy nejmenších čtverců</b>	<b>151</b>
6.1	Problém nejmenších čtverců (LS) . . . . .	152
6.2	Metody řešení LS (plná sloupcová hodnota) . . . . .	155
6.2.1	Řešení LS pomocí QR rozkladu . . . . .	155
6.2.2	Řešení LS pomocí soustavy normálních rovnic . . . . .	157

6.2.3	Řešení LS pomocí rozšířené soustavy rovnic . . . . .	158
6.3	Řešení LS v obecném případě . . . . .	159
6.4	Řešení LS pomocí QR rozkladu v obecném případě . . . . .	160
6.5	Ill-posed problémy a regularizace . . . . .	161
6.6	Total least squares – úplný problém nejmenších čtverců . . . . .	164
6.6.1	Existence a jednoznačnost řešení . . . . .	164
6.6.2	Core problém . . . . .	166
<b>7</b>	<b>Částečný problém vlastních čísel</b>	<b>171</b>
7.1	Arnoldiho metoda . . . . .	171
7.2	Lanczosova metoda . . . . .	174
7.2.1	Základní vlastnosti . . . . .	175
7.2.2	Chování Lanczosovy metody v konečné aritmetice . . . . .	178
7.3	Golub-Kahanova iterační bidiagonalizace . . . . .	181
7.4	Jacobiho matice a další souvislosti . . . . .	186
<b>8</b>	<b>Metoda sdružených gradientů</b>	<b>191</b>
8.1	Minimalizace kvadratického funkcionálu . . . . .	192
8.2	Konvergence metody sdružených gradientů . . . . .	195
8.3	Předpodmínění . . . . .	199
8.3.1	Neúplný Choleského rozklad . . . . .	201
8.4	Vztah mezi CG a Lanczosovým algoritmem . . . . .	202
8.5	Volba počáteční aproximace řešení . . . . .	204
8.6	Zastavovací kritéria . . . . .	205
8.7	Vliv konečné aritmetiky . . . . .	207
<b>9</b>	<b>Metody Krylovových podprostorů</b>	<b>213</b>
9.1	Klasické iterační metody . . . . .	213
9.1.1	Konvergenční analýza klasických iteračních metod . . . . .	214
9.1.2	Příklady klasických iteračních metod . . . . .	215
9.2	Krylovovské metody . . . . .	216
9.3	Krylovovské metody nad ortogonální bází . . . . .	219
9.3.1	Zobecněná metoda minimálních reziduí (GMRES) . . . . .	219
9.3.2	Metoda ortogonálních reziduí (FOM) . . . . .	222
9.4	Krylovovské metody nad biortogonální bází . . . . .	222
9.4.1	Nehermitovský Lanczosův algoritmus . . . . .	223
9.4.2	Metoda bikonjugovaných gradientů (BiCG) . . . . .	224
9.5	Sdružené gradienty a normální rovnice . . . . .	226
9.5.1	CGNR . . . . .	226
9.5.2	CGNE . . . . .	227
9.6	Metoda LSQR . . . . .	228
9.7	Faber-Manteuffelova věta . . . . .	229
9.8	Předpodmínění, kritéria zastavení, volba $x_0$ . . . . .	232
	<b>Slovo na závěr</b>	<b>235</b>
	<b>Řešení cvičení</b>	<b>237</b>

<b>Literatura</b>	<b>291</b>
<b>Software a knihovny matic</b>	<b>301</b>
<b>Seznam algoritmů</b>	<b>303</b>
<b>Rejstřík</b>	<b>305</b>