

# Obsah

Úvod	5
<b>1 Základní pojmy a věty</b>	<b>7</b>
1.1 Označení, definice a základní věty . . . . .	7
1.1.1 Zdola a shora polospojité funkce, konvexita . . . . .	11
1.2 Věty o existenci řešení nelineárních rovnic jedné proměnné . . .	18
1.3 Věty o pevném bodu . . . . .	19
1.4 Monotonie a koercivita funkce a operátoru . . . . .	25
1.4.1 Řešitelnost nelineárních rovnic více proměnných . . . . .	27
1.5 Diferenciální počet v normovaných prostorech . . . . .	28
1.5.1 Konvexita Banachova prostoru a dualizační zobrazení . . . . .	33
1.6 Němyckého operátor a jeho vlastnosti . . . . .	35
1.7 Minimum nelineárního funkcionálu . . . . .	40
1.8 Sobolevovy prostory . . . . .	51
<b>2 Teorie monotónních operátorů</b>	<b>57</b>
2.1 Základní pojmy, označení a vztahy . . . . .	58
2.2 *Pseudomonotónní operátory . . . . .	78
2.3 Existenční věty . . . . .	91
2.3.1 Existenční věty v Hilbertových prostorech . . . . .	91
2.3.2 Existenční věty v Banachových prostorech . . . . .	105
2.4 Numerické metody . . . . .	114
2.4.1 Galerkinova metoda . . . . .	114
2.4.2 Iterační metody . . . . .	118
<b>3 Potenciální operátory</b>	<b>123</b>
3.1 Definice a kritéria potenciálnosti operátoru . . . . .	123
3.2 Potenciální a monotónní operátory . . . . .	132
3.3 Duální funkcionál . . . . .	135
3.4 Numerické metody . . . . .	143
3.4.1 Ritzova metoda . . . . .	144
3.4.2 Iterační metody . . . . .	145

<b>4 Aplikace</b>	<b>157</b>
4.1 Diferenciální rovnice . . . . .	157
4.1.1 Zobecnění růstových podmínek . . . . .	162
4.2 Existenční věty . . . . .	166
<b>5 *Stupeň zobrazení</b>	<b>175</b>
5.1 Stupeň zobrazení v prostoru $\mathbb{R}_n$ . . . . .	175
5.1.1 Konstrukce stupně zobrazení v prostoru $\mathbb{R}_n$ . . . . .	178
5.2 Lerayův-Schauderův stupeň zobrazení . . . . .	183
5.2.1 Konstrukce stupně zobrazení v Banachově prostoru . . . . .	184
<b>A Stručný seznam označení</b>	<b>191</b>
<b>B Seznam vět, lemmat a definic.</b>	<b>193</b>
<b>Rejstřík</b>	<b>196</b>
<b>Literatura</b>	<b>201</b>

## Příloha B

# Seznam vět, lemmat a definic.

Definice 1.1.1	str.7	vybrané pojmy v normovaných prostorech
Definice 1.1.2	str.8	reflexivita Banachova prostoru
Definice 1.1.3	str.9	slabá konvergence prvků a funkcionalů
Věta 1.1.1	str.9	Eberleinova-Šmuljanova věta
Tvrzení 1.1.1	str.9	vybraná tvrzení z lineární funkcionální analýzy
Definice 1.1.4	str.11	definice vlastnosti konečného průniku
Věta 1.1.2	str.11	věta o centrovaných systémech
Definice 1.1.5	str.11	def. zdola a shora polospoj. funkce v top. prost.
Definice 1.1.6	str.11	def. zdola a shora polospoj. funkce v norm. prost.
Definice 1.1.7	str.12	konvexita a striktní konvexita funkcionalů
Lemma 1.1.1	str.12	nutná a post. podm. slabě zdola polospoj. funkce.
Lemma 1.1.2	str.13	vlastnost zdola polospoj. funkcionalů
Lemma 1.1.3	str.13	vlastnost konvexních a zdola polospoj. funkce.
Věta 1.1.3	str.14	konvexita, zdola polospoj. a slabě zdola polospoj.
Věta 1.1.4	str.14	post.podmínka pro slabě zdola polospoj.
Definice 1.1.8	str.15	nadgraf (epigraf) funkcionalů
Lemma 1.1.4	str.15	vztahy mezi vlastnostmi funkce. a jeho nadgrafu
Definice 1.1.9	str.15	definice opěrného funkcionalů
Věta 1.1.5	str.15	vztah mezi konvexitou a opěrným funkcionalům
Věta 1.1.6	str.17	nutná a post. podmínka konvexity funkce.
Věta 1.1.7	str.17	konvexita a slabě zdola polospoj. funkce
Lemma 1.1.5	str.18	zeslabení pojmu opěrného funkcionalů
Věta 1.2.1	str.15	ex. a jedn. řešení rovnice jedné reálné proměnné
Definice 1.3.1	str.19	pojem pevného (fixního) bodu
Věta 1.3.1	str.19	věta Brouwerova o pevném bodu
Věta 1.3.2	str.20	zobecněná věta Brouwerova o pevném bodu
Věta 1.3.3	str.21	zobecnění věty Brouwerovy

Věta 1.3.4	str.22	věta Schauderova-Tichonovova o fix. bodu
Věta 1.3.5	str.22	věta Schauderova o pevném bodu
Věta 1.3.6	str.23	věta Hartmanova-Stampacchiova o fix. bodu
Věta 1.3.7	str.25	věta Banachova o kontrahujícím zobrazení
Definice 1.4.1	str.25	definice monotonnosti funkce a operátoru
Definice 1.4.2	str.26	definice koercivity funkce a operátoru
Věta 1.4.1	str.26	ex. řešení nelin. rovnic více proměnných
Věta 1.4.2	str.28	surj. spoj. a koerc. zobrazení v $\mathbb{R}_n$
Věta 1.5.1	str.29	Lagrangeova formule pro G-diferenc. funkce
Lemma 1.5.1	str.33	vlastnosti G-derivace normy
Definice 1.5.1	str.33	striktně a stejn. konvex. norm. prostor
Věta 1.5.2	str.34	striktně a stejn. konv. norm. prostor
Definice 1.5.2	str.34	definice dualizačního zobrazení
Definice 1.6.1	str.36	definice Němyckého operátoru
Věta 1.6.1	str.36	vlastnosti Němyckého operátoru
Věta 1.6.2	str.39	zobecnění věty 1.6.1
Definice 1.7.1	str.40	minimalizující posloupnost
Věta 1.7.1	str.40	minimum slabě zdola polospoj. funkce.
Věta 1.7.2	str.40	minimum slabě zdola polospoj. a rost. funkce.
Věta 1.7.3	str.42	konvexita a monotonností funkce
Věta 1.7.4	str.42	konv. a monot. funkce v Hilbert. prostoru
Věta 1.7.5	str.44	zobecnění věty 1.7.4 pro norm. prostory
Definice 1.7.2	str.46	definice bodu lokálního minima funkce.
Lemma 1.7.1	str.46	vlastnosti G-derivace v bodě lok. minima
Věta 1.7.6	str.47	korektnost (ex. jediné) bodu absol. minima
Věta 1.7.7	str.48	zeslabení předpokladů věty 1.7.6
Věta 1.7.8	str.50	věta o existenci bodu lokálního minima funkce.
Věta 1.7.9	str.50	minima konv. funkce a jejich G-derivací
Definice 1.8.1	str.52	definice zobecněné derivace
Věta 1.8.1	str.53	stopa funkce na $\partial\Omega$
Věta 1.8.2	str.54	Greenova věta pro derivace prvního řádu
Věta 1.8.3	str.54	Greenova věta pro derivace vyšších řádů
Věta 1.8.4	str.55	zákl. vlastnosti vnoření Sobol.prostorů
Věta 1.8.5	str.55	vlastn. funkce z $W^{k,p}(\Omega)$
Definice 2.1.1	str.58	def. pojmů v teorii monotónních op.
Lemma 2.1.1	str.60	vztahy mezi pojmy uvedeným v def. 2.1.1
Definice 2.1.2	str.64	nejdůl. pojmy op. v refl. prostoru
Lemma 2.1.2	str.65	vztahy mezi vlastnostmi uvedeným v def.
Lemma 2.1.3	str.68	nejdůl. vlastností monotónních op.
Definice 2.2.1	str.78	def. pseudomon. oper.
Lemma 2.2.1	str.78	vztahy mezi pojmy uvedenými v def. 2.2.1
Lemma 2.2.2	str.82	součet monotónních operátorů
Lemma 2.2.3	str.82	součet pseudomonotónních operátorů
Definice 2.2.2	str.85	definice semi-monotónního operátoru
Věta 2.2.1	str.85	vztah mezi se-mimonotónností a pseudomon.

Definice 2.2.3	str.90	akreditivní a disipativní operátor
Definice 2.3.1	str.91	Lipschitzovsky spojitý operátor
Věta 2.3.1	str.91	rovnice se silně monot. a Lipssch. spoj. op.
Věta 2.3.2	str.92	Laxova-Milgramova věta
Věta 2.3.3	str.93	Stampacchiova věta (zob. Lax-Milgram v.)
Definice 2.3.2	str.95	monot. oper. na podm. Hilbert. prostoru
Věta 2.3.4	str.95	monot. a expanz. oper. v Hilbert. prostoru
Lemma 2.3.1	str.96	Mintyho l. pro monot. oper. v Hilbert. p.
Věta 2.3.5	str.96	věta o fixních bodech neexpanz. operátoru
Věta 2.3.6	str.98	zákl. věta o monot. oper. v Hilbert. prost.
Věta 2.3.7	str.101	zobecnění věty 2.3.6 pro uzavřenou kouli
Věta 2.3.8	str.102	surj. monot., koerc. oper. v Hilbert. p.
Věta 2.3.9	str.103	zeslabení předpokladů věty 2.3.8
Definice 2.3.3	str.105	def. Galerkinovy aprox. op. rovnic
Věta 2.3.10	str.106	surjektivita oper. v refl., seper. Banach. p.
Věta 2.3.11	str.109	Mintyho-Browderova v. (zob. v. 2.3.10)
Věta 2.3.12	str.112	věta analogická k větě 2.3.10 o surj.
Věta 2.3.13	str.112	zob. věty 2.3.10 pro nemonotónní operátory
Věta 2.3.14	str.113	věta Lerayova-Lionsova
Věta 2.4.1	str.115	konvergence Galerkinových aproximací
Věta 2.4.2	str.119	konvergence iter. metody v Hilbert. p.
Věta 2.4.3	str.120	komb. Galerkinova a iterační metoda
Lemma 2.4.1	str.121	konvergence pevných bodů posl. operátorů
Věta 2.4.4	str.122	konvergence projekčně-iterační metody
Definice 3.1.1	str.123	definice pojmu potenciál
Lemma 3.1.1	str.124	expl. tvar radiálně spoj.potenc. operátorů
Lemma 3.1.2	str.125	kritéria potenc. demispojitého operátoru
Lemma 3.1.3	str.127	kritéria potenc. G-diferenc. operátorů
Lemma 3.2.1	str.133	podm. řeš. rovnice s monot. potenc. oper.
Lemma 3.2.2	str.134	demispoj. monotónního potenc. operátoru
Věta 3.2.1	str.134	řešení rovnice s monot. potenc. oper.
Definice 3.3.1	str.136	efektivní oblasti funkcionálu
Definice 3.3.2	str.136	duální funkcionál
Lemma 3.3.1	str.136	vlastnosti duálního funkcionálu
Definice 3.3.3	str.139	dvakrát duální funkcionál
Lemma 3.3.2	str.139	efekt. oblast dvakrát duál. funkc.
Věta 3.3.1	str.139	vztah mezi funkc. a dvakrát duálním funkc.
Věta 3.3.2	str.140	čtyři ekv. tvrzení pro duální funkcionál
Věta 3.3.3	str.143	vlastností potenc. operátorů $A, A^{-1}$
Definice 3.4.1	str.144	definice Ritzovy aproximace řešení
Věta 3.4.1	str.144	vztah mezi Ritzovou a Galerkin. metodou
Věta 3.4.2	str.145	konvergence Ritzovy metody
Věta 3.4.3	str.146	konvergence iterační metody
Věta 3.4.4	str.149	konvergence projekčně-iterační metody
Věta 3.4.5	str.150	iter. metoda a komb. Galerkin. a iter. metoda
Lemma 3.4.1	str.152	kontraktivita spec. operátoru

Věta 3.4.6	str.156	minimalizující vlastnost posloupnosti
Věta 4.1.1	str.163	spojitost a ohraničenost Němyckého op.
Věta 4.1.2	str.164	Ohr. a spoj. oper. přísl. k form. dif. op.
Věta 4.2.1	str.172	slabé řeš. okraj. úlohy (apl. v. Minty-Browd.)
Věta 4.2.2	str.173	slabé řeš. okraj. úlohy (apl. v. 3.2.1)
Věta 4.2.3	str.173	slabé řeš. okraj. úlohy (apl. v. Leray-Lions)
Věta 5.1.1	str.175	existence stupně zobrazení v prostoru $\mathbb{R}_n$
Definice 5.1.1	str.176	definice Brouwerova stupně zobrazení
Definice 5.1.2	str.176	definice pojmu homotopického zobrazení
Věta 5.1.2	str.176	věta Brouwerova (důkaz pomocí stupně zobr.)
Věta 5.1.2	str.176	ex. stupně zobrazení na Banachově prostoru
Věta 5.2.1	str.183	vlastnosti Laray-Schauder stupně zobrazení
Definice 5.2.1	str.184	Larayova-Schauderova stupně zobrazení
Věta 5.2.2	str.190	Larayho-Schauderova věta o pevném bodu