

## Obsah

Gaussova eliminační metoda . . . . .	9
Úvodní příklad . . . . .	9
Další příklad . . . . .	10
Popis metody . . . . .	11
Diskuse po převedení matice . . . . .	12
Příklad, kdy soustava nemá řešení . . . . .	12
1. Lineární prostor, grupa, těleso . . . . .	13
Definice . . . . .	13
Věta . . . . .	13
Důkaz . . . . .	13
Definice lineárního prostoru . . . . .	14
Prostor $\mathbb{R}^2$ . . . . .	15
Prostor $\mathbb{R}^n$ . . . . .	16
Prostor funkcí . . . . .	16
Prostor polynomů . . . . .	17
Lineární podprostor . . . . .	17
Průnik prostorů . . . . .	18
Prostor orientovaných úseček . . . . .	18
Triviální prostor . . . . .	19
Grupa . . . . .	20
Pologrupa, grupoid . . . . .	22
Podgrupa . . . . .	22
Těleso . . . . .	22
Galoisovo těleso se dvěma prvky . . . . .	22
$\text{GF}(p)$ , $\mathbb{Z}_p$ . . . . .	23
Lineární prostor nad tělesem . . . . .	24
Cvičení . . . . .	25
2. Lineární závislost a nezávislost, lineární obal, báze, dimenze . . . . .	29
Lineární kombinace . . . . .	29
Triviální lineární kombinace . . . . .	29
Lineární závislost skupiny . . . . .	29
Lineární nezávislost skupiny . . . . .	30
Základní vlastnosti lineární (ne)závislosti . . . . .	32
Jeden vektor je lineární kombinací ostatních . . . . .	33
Závislost orientovaných úseček . . . . .	34
Lineární (ne)závislost nekonečných množin . . . . .	34
Lineární obal . . . . .	35
Prvek lineárního obalu . . . . .	35
Vlastnosti lineárního obalu . . . . .	36
Lineární obal je podprostor . . . . .	36
Rozšíření LN množiny . . . . .	37
Charakteristika LN množiny . . . . .	37
Báze . . . . .	37
Existence a jednoznačnost báze . . . . .	38
Báze jsou stejně velké . . . . .	39
Dimenze prostoru . . . . .	40
Dimenze podprostoru . . . . .	41
Počet prvků v LN množině . . . . .	41
Cvičení . . . . .	41
Matematická indukce . . . . .	44
3. Matice . . . . .	45
Definice matice . . . . .	45
Lineární prostor matic . . . . .	45

Symetrie relace „ $\sim$ “ . . . . .	46
Gaussova eliminace zachovává obal . . . . .	47
Hodnost matice . . . . .	47
Trojúhelníkové matice . . . . .	47
Numericky nestabilní matice . . . . .	48
Transponovaná matice . . . . .	48
Násobení matic . . . . .	49
Komutující matice . . . . .	51
Matice vektorů . . . . .	52
Jednotková matice . . . . .	52
Inverzní matice . . . . .	53
Regulární, singulární matice . . . . .	53
Výpočet inverzní matice eliminací . . . . .	53
Hodnost součinu matic . . . . .	55
Cvičení . . . . .	56
<b>4. Determinant . . . . .</b>	<b>61</b>
Permutace . . . . .	61
Znaménko permutace . . . . .	62
Definice determinantu . . . . .	63
Základní vlastnosti . . . . .	65
Metoda počítání determinantu . . . . .	66
Rozvoj determinantu . . . . .	67
Součin determinantů . . . . .	69
Existence inverzní matice . . . . .	69
Cvičení . . . . .	71
<b>5. Soustavy lineárních rovnic . . . . .</b>	<b>75</b>
Frobeniova věta . . . . .	75
Princip eliminační metody . . . . .	76
Řešení homogenní soustavy . . . . .	76
Řešení nehomogenní soustavy . . . . .	77
Strojové řešení soustav . . . . .	78
Nejednoznačnost zápisu řešení . . . . .	79
Soustavy se čtvercovou maticí . . . . .	80
Dodatky k řešení soustav . . . . .	82
Soustava lineárních soustav . . . . .	83
Cvičení . . . . .	84
<b>6. Více o lineárních prostorech konečné dimenze . . . . .</b>	<b>88</b>
Spojení prostorů . . . . .	88
Dimenze průniku a spojení . . . . .	88
Souřadnice vektoru . . . . .	90
Existence a jednoznačnost souřadnic . . . . .	90
Matice přechodu . . . . .	91
Souřadnice vektoru a matice přechodu . . . . .	93
Přechod od báze $(B)$ přes $(C)$ k $(D)$ . . . . .	93
Sestavení matic přechodu . . . . .	93
Cvičení . . . . .	95
<b>7. Lineární zobrazení . . . . .</b>	<b>98</b>
Definice zobrazení . . . . .	98
Zobrazení „na“ . . . . .	98
Prosté zobrazení . . . . .	98
Definice lineárního zobrazení . . . . .	98
Princip superpozice . . . . .	98
Zachování obalů . . . . .	99
Jádro zobrazení . . . . .	99

Defekt a hodnost zobrazení . . . . .	100
Souřadnice jako lineární zobrazení . . . . .	101
Lineární zobrazení na bázi . . . . .	101
Zobrazení lineárně nezávislých vektorů . . . . .	102
Složené zobrazení . . . . .	103
Inverzní zobrazení . . . . .	103
Izomorfismus . . . . .	104
Matice lineárního zobrazení . . . . .	104
Zobrazení souřadnic . . . . .	105
Defekt + hodnost zobrazení . . . . .	107
Matice složeného zobrazení . . . . .	107
Matice identity . . . . .	108
Zobrazení do stejného prostoru . . . . .	109
Vlastní číslo, vlastní vektor . . . . .	109
Podobnost s diagonální maticí . . . . .	112
Cvičení . . . . .	114
Homogenní souřadnice . . . . .	119
Cvičení k vlastním číslům a podobnosti matic . . . . .	121
<b>8. Lineární prostory se skalárním součinem . . . . .</b>	<b>123</b>
Definice skalárního součinu . . . . .	123
Skalární součiny na $\mathbf{R}^n$ . . . . .	124
Symetrické a pozitivně definitní matice . . . . .	124
Velikost vektoru . . . . .	125
Úhel dvou vektorů . . . . .	125
Vzdálenost vektorů . . . . .	126
Kolmé vektory . . . . .	127
Ortonormální báze . . . . .	127
Ortogonalizační proces . . . . .	129
Cvičení . . . . .	129
<b>9. Aplikace lineární algebry v geometrii . . . . .</b>	<b>134</b>
Euklidovský prostor . . . . .	134
Souřadnice orientovaných úseček . . . . .	134
Skalární součin orientovaných úseček . . . . .	134
Kolmý průmět vektoru na vektor . . . . .	135
Ortonormální báze v $U_O$ . . . . .	135
Kladně orientovaná báze . . . . .	136
Vektorový součin . . . . .	136
Smíšený součin . . . . .	138
Prostor $V_3$ volných vektorů . . . . .	139
Součet bodu s vektorem . . . . .	140
Přímka a rovina . . . . .	140
Souřadnicový systém v $\mathbf{E}_3$ . . . . .	140
Rovnice přímky . . . . .	142
Vzájemná poloha dvou přímek . . . . .	143
Rovnice roviny . . . . .	144
Vzájemná poloha přímky a roviny . . . . .	146
Vzájemná poloha dvou rovin . . . . .	146
Souměrné body . . . . .	147
Tři roviny . . . . .	148
Cvičení . . . . .	148
<b>10. Lineární algebra v teorii kódování . . . . .</b>	<b>151</b>
Těleso $\mathbf{Z}_2$ . . . . .	151
Počítání v $\mathbf{Z}_2$ . . . . .	152
Kód, kódové slovo . . . . .	153
Kódování s detekcí a opravou chyb . . . . .	153

Lineární kód . . . . .	154
Generující a kontrolní matice . . . . .	156
Kodér lineárního kódu . . . . .	157
Dekodér lineárního kódu . . . . .	158
Hammingův kód . . . . .	160
Rozšířený Hammingův kód . . . . .	161
Cvičení . . . . .	162
<b>11. Polynomy . . . . .</b>	<b>165</b>
Definice polynomu . . . . .	165
Operace s polynomy . . . . .	165
Reálné koeficienty . . . . .	167
Stupeň polynomu . . . . .	167
Částečný podíl polynomů . . . . .	168
Hornerovo schéma . . . . .	169
Kořen polynomu . . . . .	171
Hledáme kořeny polynomu . . . . .	172
Rozklad na kořenové činitele . . . . .	174
Reálný rozklad . . . . .	177
Ireducibilní polynomy . . . . .	179
Cvičení . . . . .	180
<b>12. Literatura . . . . .</b>	<b>183</b>
<b>13. Rejstřík . . . . .</b>	<b>184</b>