

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
1.1 Optimalizační problémy . . . . .	2
<b>2 Nelineární programování</b>	<b>6</b>
2.1 Klasifikace úloh matematického programování . . . . .	6
2.2 Přípustné směry - volný extrém . . . . .	8
2.2.1 Podmínky prvního řádu . . . . .	8
2.2.2 Podmínky druhého řádu . . . . .	9
2.3 Vázané extrémy . . . . .	11
2.3.1 Omezení typu rovnosti . . . . .	12
2.3.2 Citlivostní věta - stínové ceny . . . . .	14
2.3.3 Omezení s nerovnostmi . . . . .	15
2.4 Sedlový bod a dualita . . . . .	18
2.4.1 Sedlové vlastnosti Lagrangeovy funkce . . . . .	18
2.4.2 Dualita úloh nelineárního programování . . . . .	19
2.5 Vícekriteriální optimalizace . . . . .	21
2.6 Příklady . . . . .	24
<b>3 Minimalizace kvadratických forem</b>	<b>28</b>
3.1 Minimalizace - analytické vztahy . . . . .	31
3.2 Zobecněná Choleskyho faktorizace . . . . .	33
3.3 LDU faktorizace . . . . .	35
3.4 Aktualizace Choleskyho faktoru . . . . .	36
3.5 Aktualizace LDU faktorů . . . . .	39
<b>4 Lineární programování</b>	<b>43</b>
4.1 Typické problémy vedoucí na LP . . . . .	43
4.2 Ekvivalentní formy lineárních úloh . . . . .	45
4.3 Grafické řešení optimalizace lineárních modelů . . . . .	45
4.4 Předběžná analýza problému . . . . .	46

4.5	Simplexová metoda . . . . .	48
4.6	Vlastnosti množiny přípustných a optimálních řešení . . . . .	51
4.7	Maticový zápis simplexové metody . . . . .	56
4.8	Speciální případy . . . . .	59
4.8.1	Alternativní optimální řešení . . . . .	59
4.8.2	Neomezená řešení . . . . .	60
4.8.3	Jiná omezení a jejich převod na kanonický tvar . . . . .	61
4.9	Příklady . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Úvod do teorie her</b>	<b>64</b>
5.1	Antagonistický konflikt . . . . .	65
5.1.1	Hry s konstantním součtem . . . . .	65
5.1.2	Maticové hry . . . . .	66
5.1.3	Smíšené rozšíření maticové hry . . . . .	68
5.2	Rozhodování při riziku a neurčitosti . . . . .	74
5.2.1	Rozhodování při riziku . . . . .	74
5.2.2	Rozhodování při neurčitosti . . . . .	74
5.3	Neantagonistický konflikt dvou hráčů . . . . .	77
5.3.1	Nekooperativní teorie . . . . .	78
5.3.2	Kooperativní teorie - přenosná výhra . . . . .	80
5.3.3	Kooperativní teorie - nepřenosná výhra . . . . .	81
5.4	Příklady . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Numerické metody</b>	<b>85</b>
6.1	Algoritmy a jejich konvergence . . . . .	85
6.2	Jednorozměrová optimalizace . . . . .	87
6.2.1	Fibonacciova metoda . . . . .	87
6.2.2	Newtonova metoda . . . . .	90
6.2.3	Metoda kvadratické interpolace . . . . .	94
6.2.4	Nepřesné algoritmy jednorozměrové optimalizace . . . . .	95
6.3	Numerické metody bez omezení . . . . .	97
6.3.1	Komparativní metody . . . . .	98
6.3.2	Gradientní metody . . . . .	100
6.3.3	Newtonova metoda a její modifikace . . . . .	105
6.3.4	Gauss-Newtonova metoda . . . . .	107
6.3.5	Metody konjugovaných směrů . . . . .	108
6.3.6	Metoda konjugovaných gradientů . . . . .	110
6.3.7	Kvazi-newtonovské metody . . . . .	113

6.4	Numerické metody s omezením . . . . .	116
6.4.1	Metody přípustných směrů . . . . .	117
6.4.2	Metody aktivních množin . . . . .	118
6.4.3	Metoda projekce gradientu . . . . .	119
6.4.4	Metoda redukovaného gradientu . . . . .	121
6.4.5	Metody pokutových funkcí . . . . .	124
6.4.6	Metody barierových funkcí . . . . .	126
6.4.7	Metody vnitřního bodu . . . . .	127
6.4.8	Sekvenční kvadratické programování . . . . .	131
<b>7</b>	<b>Variační metody</b>	<b>139</b>
7.1	Problém optimálního řízení dynamických systémů . . . . .	139
7.2	Variační metody . . . . .	141
7.2.1	Základní variační úloha . . . . .	141
7.2.2	Volné koncové body . . . . .	146
7.2.3	Další nutné a postačující podmínky . . . . .	149
7.3	Rozšíření základní úlohy . . . . .	153
7.3.1	Extrémy funkcionálu v $n$ -rozměrném prostoru . . . . .	153
7.3.2	Variační problémy s omezením . . . . .	154
7.3.3	Lagrangeova, Mayerova a Bolzova úloha . . . . .	155
7.4	Řešení problému optimálního řízení dynamických systémů . . . . .	156
7.4.1	Optimální řízení bez omezení . . . . .	157
7.4.2	Řešení optimalizačního problému s omezením . . . . .	161
7.5	Kanonický tvar Eulerovy - Lagrangeovy rovnice . . . . .	162
7.6	Příklady . . . . .	165
<b>8</b>	<b>Dynamické programování</b>	<b>168</b>
8.1	Princip metody dynamického programování . . . . .	168
8.1.1	Princip optimality a princip invariantního vnoření . . . . .	168
8.1.2	Řešení jednoduché úlohy metodou DP . . . . .	169
8.2	Optimální řízení diskrétních systémů . . . . .	172
8.2.1	Diskrétní úloha optimalizace . . . . .	172
8.2.2	Převod spojitého optimalizačního problému na diskrétní . . . . .	174
8.2.3	Převod diskrétního optimalizačního problému na úlohu matematického programování . . . . .	174
8.2.4	Řešení problému diskrétního optimálního řízení pomocí DP . . . . .	175

8.2.5	Řešení některých speciálních úloh dynamickým programováním . . . . .	180
8.2.6	Řešení spojité úlohy optimálního řízení dynamickým programováním . . . . .	184
8.2.7	Příklady . . . . .	188

## **9 Princip maxima 190**

9.1	Souvislost dynamického programování a variačních metod . . . . .	190
9.2	Dynamické programování a princip maxima . . . . .	193
9.3	Nutná podmínka optimality - princip maxima . . . . .	198
9.4	Řešení některých problémů optimálního řízení principem maxima . . . . .	201
9.4.1	Obecný postup řešení . . . . .	201
9.4.2	Časově optimální řízení . . . . .	203
9.5	Diskrétní princip maxima . . . . .	205
9.5.1	Podmínky optimálnosti . . . . .	205
9.5.2	Diskrétní princip maxima . . . . .	208
9.6	Příklady . . . . .	212

## **10 Stochasticky optimální řízení 216**

10.1	Stochasticky optimální řízení ARMAX modelu . . . . .	216
10.1.1	ARMAX model a jeho pozorovatelný kanonický tvar . . . . .	216
10.1.2	Současné odhadování stavů a parametrů ARMAX modelu . . . . .	219
10.1.3	Stochasticky optimální řízení . . . . .	221
10.1.4	Střední hodnoty součinu závislých náhodných veličin . . . . .	225
10.1.5	Výpočet optimálního řízení . . . . .	227
10.2	Stochasticky optimální řízení ARX modelu . . . . .	232
10.2.1	ARX model . . . . .	232
10.2.2	Odhadování parametrů ARX modelu . . . . .	232
10.2.3	Stavové rovnice ARX modelu . . . . .	233
10.2.4	Opatrné strategie ARX modelu . . . . .	234
10.3	Příklad . . . . .	238

## **Literatura 241**