

Obsah

Co už možná známe, místo řeči úvodem	13
1 Základní stavební kameny — vektory & matice	19
1.1 Několik slov k množinám a uspořádaným množinám — n -ticím . . .	19
1.1.1 Kartézský součin množin	20
1.1.2 Některé číselné množiny	21
1.2 Vektory	22
1.2.1 Vektory v analytické geometrii	22
1.2.2 Vektory ve fyzice	23
1.2.3 Vektory jako uspořádané n -tice	24
1.3 Operace s vektory	25
1.3.1 Součet dvou vektorů	25
1.3.2 Součin vektoru a čísla	26
1.3.3 Lineární kombinace vektorů	29
1.3.4 Součin dvou vektorů?	30
1.3.4.1 Skalární součin	31
1.3.4.2 Vektorový součin	31
1.4 Matice	32
1.4.1 Matice jako uspořádané (n, k) -tice	32
1.4.2 Součet dvou matic, součin matice a čísla	33
1.4.3 Transpozice matice	34
1.4.4 Matice speciálních tvarů	35
1.4.5 Matice se speciální strukturou prvků	35
2 Maticové násobení	39
2.1 Součin matice a vektoru (MV-součin)	39
2.1.1 MV-součin — definice a příklady užití	39
2.1.2 MV-součin jako lineární kombinace sloupců matice	44
2.2 Součin dvou matic (MM-součin)	46
2.2.1 MM-součin — definice a příklady užití	46
2.2.2 ☆ MM-součin matic speciálních tvarů	48
2.2.3 ☆ MM-součin jako soubor MV-, resp. VM-součinů	50
2.2.3.1 Výpočet prvků součinu po sloupcích	51
2.2.3.2 Výpočet prvků součinu po řádcích	52

2.2.4 ☆ MM-součin matic jako součet vnějších součinů	54
2.3 Vlastnosti maticového násobení	56
2.3.1 Maticové násobení není komutativní	57
2.3.2 Maticové násobení je asociativní	57
2.3.3 Maticové násobení je distributivní vůči sčítání	60
2.3.4 Transpozice součtu a transpozice součinu	61
2.4 Vybrané zajímavé součiny	62
3 Lineární (ne)závislost & ekvivalentní úpravy	69
3.1 S jakými objekty budeme pracovat?	69
3.2 Lineární závislost a nezávislost	70
3.2.1 Plyne z lineární závislosti existence vektoru, který lze na- kombinovat z ostatních?	71
3.2.2 Lineární (ne)závislost podmnožiny a nadmnožiny	73
3.2.3 Přeformulování úlohy lineární (ne)závislosti vektorů	77
3.3 Ekvivalentní úpravy	79
3.3.1 Ekvivalentní úpravy souboru vektorů	80
3.3.1.1 Násobení vektoru nenulovým číslem	80
3.3.1.2 Přičtení násobku vektoru k jinému vektoru	82
3.3.1.3 Skládání elementárních úprav	83
3.3.2 Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic	85
3.3.2.1 Přidání & vypuštění nulové rovnice	88
3.3.3 Ekvivalentní úpravy v kontextu matic	88
3.3.3.1 Permutace řádků, resp. permutace sloupců	89
3.4 Maticový zápis ekvivalentních úprav	90
3.4.1 Násobení řádku matice nenulovým číslem	92
3.4.2 Přičtení násobku řádku matice k jinému řádku	93
3.4.3 Složené úpravy: přičtení mnoha řádků k jednomu, přičtení jednoho řádku k mnoha	95
3.4.4 Přidání & vypuštění nulového řádku matice	99
3.4.5 Permutace řádků matice	100
4 Gaußova eliminace & související pojmy	103
4.1 Úvodní poznámky	103
4.1.1 Metoda sčítací a dosazovací	104
4.1.2 Soustava v trojúhelníkovém tvaru	105
4.1.3 Lineární (ne)závislost řádků a sloupců matice v trojúhelní- kovém tvaru	106
4.2 Převod obecné soustavy do horního trojúhelníkového tvaru	107
4.2.1 Základní struktura Gaußovy eliminace	107
4.2.2 Nula na diagonále — permutace, resp. pivotace	110
4.2.3 A může být hůř: Co když neexistuje nenulový pivot? Co když soustava není čtvercová?	111
4.3 Hodnota matice & základní klasifikace matic	115
4.3.1 Počet lineárně nezávislých řádků a sloupců schodovité matice	116
4.3.2 Jak moc různé jsou různé schodovité tvary téže matice?	118

4.3.3	Hodnost matice	119
4.3.4	Klasifikace matic z hlediska tvaru a hodnoti	120
4.4	Základní věty o existenci a jednoznačnosti řešení soustavy lineárních rovnic	122
4.4.1	Klasifikace soustav rovnic	122
4.4.2	Frobeniova věta	123
4.4.3	Věta o soustavě s maticí plné řádkové hodnoti	125
4.4.4	Věta o soustavě s maticí plné sloupcové hodnoti	126
4.4.5	Poznámka k soustavě s regulární maticí	127
4.5	Inverzní matice	127
4.5.1	Existence inverze	128
4.5.1.1	Pravá inverze	129
4.5.1.2	Levá inverze	129
4.5.1.3	Levá a pravá inverze jedno jsou	130
4.5.2	Střípky z aritmetiky regulárních, resp. singulárních matic	131
4.5.3	Několik slov na závěr	136
5	Gaußova eliminace jako LU-rozklad	139
5.1	Několik užitečných lemmátek úvodem	139
5.1.1	Součiny a inverze trojúhelníkových matic	139
5.1.2	Součiny a inverze eliminačních matic	142
5.2	LU-rozklad	146
5.2.1	Příklad na úvod	146
5.2.2	Gaußova eliminace, tj. LU-rozklad regulární matice krok za krokem	149
5.2.2.1	První krok	149
5.2.2.2	Druhý krok	150
5.2.2.3	Třetí krok	151
5.2.2.4	Obecný ℓ -tý krok, $\ell = 1, 2, 3, \dots, n - 1$	153
5.2.2.5	Shrnutí: LU-rozklad regulární matice	154
5.2.3	Věta o LU-rozkladu silně regulární matice	154
5.3	LU-rozklad v kontextu řešených úloh	159
5.3.1	Jak využít LU-rozklad k řešení soustavy rovnic?	159
5.3.2	Co se doopravdy děje při řešení soustavy pomocí Gaußovy eliminace?	160
5.3.3	Jak se LU-rozklad manifestuje ve výpočtu inverze pomocí Gaußovy eliminace?	161
5.3.4	Jak souvisí LU-rozklad matice s UL-rozkladem její inverze?	162
5.4	Pivotace, aneb permutace řádků	163
5.4.1	Zařazení permutací řádků do procesu eliminace	163
5.4.2	Permutační a eliminační půlkrok skoro komutují	164
5.4.3	Věta o LU-rozkladu obecné regulární matice	166
5.4.4	☆ Motivace pro výběr pivota	167
5.4.5	Obecný LU-rozklad v kontextu řešených úloh	169

6 Lineární vektorový prostor, aneb vektory jsou skoro všude	171
6.1 Lineární vektorový prostor	171
6.1.1 Základní aritmetika lineárního vektorového prostoru	173
6.1.2 Příklady lineárních vektorových prostorů	175
6.1.2.1 Prostory aritmetických vektorů	175
6.1.2.2 Prostory matic	177
6.1.2.3 Prostory rovnic a prostory funkcí	177
6.1.2.4 Některé další zajímavé prostory	180
6.1.3 Podprostor a nadprostor daného prostoru	183
6.2 Lineární obal, báze, dimenze a souřadnice	188
6.2.1 Lineární obal souboru vektorů jako podprostor	189
6.2.2 Báze prostoru	190
6.2.3 Dimenze prostoru	196
6.2.4 Souřadnice vektoru v bázi	200
6.2.5 Matice přechodu mezi bázemi	201
7 Měříme vzdálenosti a velikosti úhlů v lineárním vektorovém prostoru	211
7.1 Jejich pravítkem je norma...	212
7.1.1 Eukleidovská norma v \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n	213
7.1.2 Taxikářská norma v \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n	215
7.1.3 Maximová norma v \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n	216
7.1.4 Obecná p -norma v \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n	217
7.2 Jejich úhломěrem je skalární součin...	219
7.2.1 Základní aritmetika skalárního součinu	221
7.2.2 Cauchyho–Schwarzova–Buňakovského nerovnost	222
7.2.3 Skalární součin indukuje normu	224
7.2.4 A kdy už konečně začneme měřit ty úhly?	227
7.2.4.1 Velikosti úhlů mezi nenulovými vektory	227
7.2.4.2 Zúplnění konceptu velikosti úhlu — ortogonalita	228
7.2.5 Standardní skalární součin v \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n	230
7.3 Ortogonalita a ortonormalita	232
7.3.1 Ortogonální, ortonormální vs. lineárně (ne)nezávislý a soubor vektorů	233
7.3.2 Od vektorů k podprostorům — vzájemná ortogonalita dvou podprostorů	235
7.3.3 Ortogonální doplněk	236
7.4 ☆ Tři poznámky na závěr	237
7.4.1 Ne každá norma je indukovaná skalárním součinem	237
7.4.2 Obecný skalární součin v \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n	240
7.4.3 Normy a skalární součiny v ostatních vektorových prostorech	243

8 Lineární zobrazení & matice — se speciálním zřetelem na zobrazení shodná	245
8.1 Lineární zobrazení & matice	245
8.1.1 Lineární zobrazení na konečnědimenzionálních prostorech <i>jsou matice</i>	246
8.1.2 Matice <i>jsou</i> lineární zobrazení	249
8.2 Obor hodnot a nulový prostor matice zobrazení	250
8.2.1 Obor hodnot neboli obraz matice	250
8.2.2 Nulový prostor neboli jádro matice	252
8.2.3 Vzájemný vztah oborů hodnot a nulových prostorů matic A a A^H	254
8.2.4 ☆ Další vybrané vlastnosti oborů hodnot a nulových prostorů	256
8.3 Ortogonální & unitární matice — shodná zobrazení	259
8.3.1 Několik poznámek k tradiční klasifikaci shodných zobrazení	259
8.3.1.1 Shodná zobrazení jsou obecně afinní — translací (posunutím) k linearizaci	259
8.3.1.2 Středová symetrie v rovině je zároveň rotací	261
8.3.1.3 Změny v (ne)přímosti zobrazení při rozšíření do \mathbb{R}^3 a dál	261
8.3.2 Ortogonální a unitární matice obecně	265
8.3.3 Givensovy rotace (otočení) v \mathbb{R}^n — shodná zobrazení přímá	268
8.3.4 Householderovy reflexe (zrcadlení) v \mathbb{R}^n — shodná zobrazení nepřímá	274
8.4 QR-rozklad matice & orto[gon norm]alizace	282
8.4.1 Nulování složek vektoru	282
8.4.2 Nulování složek matice neboli QR-rozklad	286
8.4.3 ☆ Gramova–Schmidtova ortogonalizace	291
9 Determinanty — zpět ke kořenům	299
9.1 Determinanty nízkých řádů, obecná definice determinantu & jeho geometrický význam	299
9.1.1 Determinant řádu 2	300
9.1.2 Determinant řádu 3	302
9.1.3 Determinant řádu n	307
9.2 Základní vlastnosti determinantů	311
9.2.1 Determinant transponované a hermitovsky sdružené matice	311
9.2.2 Laplaceův rozvoj determinantu	314
9.3 Multilinearita determinantu, Gaußova eliminace & výpočet deter- minantu, determinant součinu matic	320
9.3.1 Determinant jako multilineární forma	320
9.3.2 Determinant a Gaußova eliminace: praktický návod na výpočet determinantu	323
9.3.2.1 Násobení řádku číslem & matice s nulovým řádkem	324
9.3.2.2 Prohození dvou řádků & matice se stejnými řádky	324
9.3.2.3 Přičtení násobku řádku k jinému řádku	325

9.3.3	Nenulovost determinantu jako indikátor regularity & determinant součinu matic	326
9.4	☆ Vybrané klasické aplikace — Cramerovo pravidlo, adjugovaná matice & vztah mezi determinantem a vektorovým součinem	331
9.4.1	Cramerovo pravidlo	331
9.4.2	Adjugovaná matice	333
9.4.3	Vektorový součin	336
10	Polynomiální intermezzo — řešení rovnic vyšších stupňů	341
10.1	Několik tipů & triků na úvod	341
10.1.1	Monický polynom a přechod k monickému polynomu	342
10.1.2	Vynulování druhého členu polynomu	342
10.1.3	Redukovaný tvar polynomu	343
10.1.4	Dělení polynomu polynomem	344
10.1.5	Hornerův tvar polynomu & Hornerův algoritmus pro dělení kořenovým činitelem	346
10.2	Polynomiální rovnice nízkých stupňů	349
10.2.1	Kořeny lineární rovnice ($n = 1$)	349
10.2.2	Kořeny kvadratické rovnice ($n = 2$)	349
10.2.3	☆ Kořeny kubické rovnice ($n = 3$)	350
10.2.4	☆ Kořeny kvartické rovnice ($n = 4$)	351
10.3	Speciální polynomiální rovnice	352
10.3.1	Kořeny binomické rovnice a víceznačená komplexní odmocnina	352
10.3.2	☆ Racionální kořeny polynomu s racionálními, resp. celočíselnými koeficienty	353
10.3.3	☆ Palindromické a antipalindromické polynomy	355
10.4	Obecné výsledky	358
10.4.1	Galoisova věta	358
10.4.2	Gaußova věta — základní věta algebry	359
10.4.3	Rozklad na kořenové činitele	366
10.4.4	Kořeny reálného polynomu	368
11	Problém vlastních čísel a vlastních vektorů	371
11.1	Motivace	371
11.1.1	Problém vlastních čísel ve fyzice	371
11.1.2	Problém vlastních čísel v chemii	373
11.1.3	Problém vlastních čísel v informatice	373
11.2	Vlastní čísla, vlastní vektory & podobnost matic	375
11.2.1	Vlastní čísla jako kořeny polynomů	376
11.2.2	Vlastní vektory, které odpovídají různým vlastním číslům	381
11.2.3	Podobnost matic	384
11.3	Schurova věta & svět normálních matic	387
11.3.1	Schurova věta	387
11.3.2	Normální matice	390
11.3.3	Příklady normálních matic	394

11.3.4	Vlastní vektory normálních matic	397
11.3.5	Vlastní čísla vybraných normálních matic	399
11.3.5.1	Symetrické a hermitovské matice	399
11.3.5.2	Koso-symetrické a koso-hermitovské matice	401
11.3.5.3	Ortogonální a unitární matice	402
11.4	Krátký výlet do světa nenormálních matic	405
11.4.1	Diagonalizovatelné matice	405
11.4.2	Levé a pravé vlastní vektory & spektrální rozklad diagonalizovatelných matic	407
11.4.3	Defektní matice & Jordanův blok	411
11.4.4	Jordanův kanonický tvar & geometrická násobnost vlastních čísel	415
12	Doplněk #1: Kvadratické formy	419
12.1	Drobný výlet do matematické analýzy	419
12.1.1	Průběh funkce, aproximace funkce polynomem & Taylorův rozvoj	420
12.1.2	Zobecnění pro funkce více proměnných	422
12.2	Lineární, bilineární a kvadratická forma	423
12.2.1	Lineární forma	424
12.2.2	Bilineární forma	424
12.2.3	Kvadratická forma	427
12.3	Definitnost a inercie kvadratických forem	429
12.3.1	Diagonalizace kvadratických forem	429
12.3.2	Definitnost kvadratických forem	430
12.3.3	Nutná podmínka pozitivní a negativní definitnosti	432
12.3.4	Prokládání vlastních čísel a Sylvesterovo kritérium	434
12.4	☆ Jak správně transformovat — podobnost vs. maticová kongruence, kontravariantní vs. kovariantní souřadnice	436
13	Doplněk #2: ☆ Singulární rozklad	439
13.1	Motivace	439
13.1.1	Hermitovská matice a její spektrální rozklad	439
13.1.2	Hermitovská matice jako lineární zobrazení	440
13.2	Lineární zobrazení reprezentované obecnou maticí	442
13.2.1	Základní vlastnosti matic $A^H \cdot A$ a $A \cdot A^H$	443
13.2.2	Spektrální rozklady matic $A^H \cdot A$ a $A \cdot A^H$	444
13.2.3	Zavedení singulárního rozkladu	446
13.2.4	Maticový zápis singulárního rozkladu	447
13.3	Vybrané aplikace singulárního rozkladu	451
13.3.1	Jak lineární zobrazení deformuje prostor?	451
13.3.2	SVD & analýza dat	454
13.3.3	SVD & komprese dat	455
13.3.4	Hlavní úhly mezi podprostory	458
13.3.5	Pseudoinverze matice	461

