

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorbemerkungen	1
Erstes Kapitel.	
Vorbereitungen.	
§ 1. Der Zahlbegriff	3
Das System der reellen Zahlen. S. 3 — Die Zahlensysteme. S. 6	
§ 2. Der Funktionsbegriff.	7
Beispiele. S. 7 — Begriffliche Formulierung. S. 8 — Graphische Darstellung. Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit. Stetigkeit. S. 9 — Umkehrfunktionen. S. 13	
§ 3. Nähere Betrachtung der elementaren Funktionen	14
Die rationalen Funktionen. S. 14 — Algebraische Funktionen. S. 15 — Die trigonometrischen Funktionen. S. 16 — Exponentialfunktion und Logarithmus. S. 17	
§ 4. Funktionen einer ganzzahligen Veränderlichen	18
§ 5. Der Begriff des Grenzwertes einer Zahlenfolge. Beispiele.	20
Einfachste Beispiele. S. 20—24 — Zur geometrischen Veranschaulichung der Grenzwerte von α^n und $\sqrt[n]{p}$. S. 25 — Die geometrische Reihe. S. 26 — $a_n = \sqrt[n]{n}$. S. 27 — $a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$. S. 27 — $a_n = \frac{n}{2^n}$. S. 27	
§ 6. Genauere Erörterung des Grenzwertbegriffes.	28
Allgemeines. S. 28 — Rechnen mit Grenzwerten. S. 30 — Die Zahl e . S. 32 — Die Zahl π als Grenzwert. S. 33 — Das arithmetisch-geometrische Mittel. S. 34	
§ 7. Der Begriff des Grenzwertes bei stetigen Veränderlichen	35
§ 8. Der Begriff der Stetigkeit	37
Definitionen. S. 37 — Unstetigkeitspunkte. S. 38 — Sätze über stetige Funktionen. S. 41	
Anhang zum ersten Kapitel.	
Vorbemerkungen	42
§ 1. Das Häufungsstellen-Prinzip und seine Anwendungen	43
Das Häufungsstellen-Prinzip. S. 43 — Grenzwerte von Zahlenfolgen. Beweis des Cauchyschen Konvergenzkriteriums. S. 44 — Obere und untere Grenze, oberer und unterer Häufungspunkt einer Zahlenmenge. S. 47	
§ 2. Sätze über stetige Funktionen	48
Größter und kleinster Wert stetiger Funktionen. S. 48 — Die Gleichmäßigkeit der Stetigkeit. S. 49 — Der Zwischenwertsatz. S. 51 — Umkehrung einer stetigen monotonen Funktion. S. 52 — Weitere Sätze über stetige Funktionen. S. 52	

	Seite
§ 3. Bemerkungen über die elementaren Funktionen.	53
§ 4. Polarkoordinaten	54
§ 5. Bemerkungen über komplexe Zahlen	55

Zweites Kapitel.

Grundbegriffe der Integral- und Differentialrechnung.

§ 1. Das bestimmte Integral	58
Das Integral als Flächeninhalt. S. 58 — Die analytische Definition des Integrales. S. 60 — Ergänzungen, Bezeichnungen und Grundregeln für das bestimmte Integral. S. 61	
§ 2. Beispiele	63
Erstes Beispiel und zweites Beispiel. S. 63 und 64 — Integration von x^α bei beliebigem positivem ganzzahligen α . S. 65 — Integration von x^α für beliebiges rationales α . S. 66 — Integration von $\sin x$ und $\cos x$. S. 68	
§ 3. Die Ableitung oder der Differentialquotient	69
Differentialquotient und Kurventangente. S. 69 — Der Differentialquotient als Geschwindigkeit. S. 72 — Beispiele. S. 73 — Einige Grundregeln für die Differentiation. S. 75 — Differenzierbarkeit und Stetigkeit der Funktionen. S. 76 — Höhere Ableitungen und ihre Bedeutung. S. 78 — Differentialquotienten und Differenzenquotienten; Bezeichnungen von Leibniz. S. 79 — Der Mittelwertsatz. S. 81 — Angenäherte Darstellung beliebiger Funktionen durch lineare. Differentiale. S. 84 — Bemerkungen über die Anwendungen unserer Begriffe in der Naturwissenschaft. S. 85	
§ 4. Das unbestimmte Integral, die primitive Funktion und die Fundamentalsätze der Differential- und Integralrechnung	86
Das Integral als Funktion der oberen Grenze. S. 86 — Der Differentialquotient des unbestimmten Integrals. S. 88 — Die primitive Funktion (Stammfunktion); allgemeine Definition des unbestimmten Integrales. S. 89 — Die Verwendung der primitiven Funktion zur Ausführung bestimmter Integrale. S. 92 — Einige Beispiele. S. 94	
§ 5. Einfachste Methoden zur graphischen Integration	95
§ 6. Weitere Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen Integral und Differentialquotient	97
Massenverteilung und Dichte; Gesamtquantität und spezifische Quantität. S. 97 — Gesichtspunkte der Anwendungen. S. 99	
§ 7. Integralabschätzungen und Mittelwertsatz der Integralrechnung . .	101
Der Mittelwertsatz der Integralrechnung. S. 101 — Anwendungen. Die Integration von x^α für beliebiges irrationales α . S. 103	

Anhang zum zweiten Kapitel.

§ 1. Die Existenz des bestimmten Integrales einer stetigen Funktion . .	105
§ 2. Zusammenhang des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung	107

Drittes Kapitel.

Differential- und Integralrechnung der elementaren Funktionen.

§ 1. Die einfachsten Differentiationsregeln und ihre Anwendungen . . .	109
Differentiationsregeln. S. 109 — Differentiation der rationalen Funktionen. S. 111 — Differentiation der trigonometrischen Funktionen. S. 112	

	Seite
§ 2. Die entsprechenden Integralformeln	113
Allgemeine Integrationsregeln. S. 113 — Integration der einfachsten Funktionen. S. 113	
§ 3. Die Umkehrfunktion und ihr Differentialquotient	115
Die allgemeine Differentiationsformel. S. 115 — Die Umkehrfunktionen der Potenzen und der trigonometrischen Funktionen. S. 117 — Die zugehörigen Integralformeln. S. 120	
§ 4. Die Differentiation der zusammengesetzten Funktionen	122
Die Kettenregel. S. 122 — Beispiele und Anwendungen. S. 124 — Nochmals Integration und Differentiation von x^α für irrationales α . S. 125	
§ 5. Maxima und Minima	126
Allgemeine Vorbemerkungen über die geometrische Bedeutung der Differentialquotienten. S. 126 — Maxima und Minima. S. 128 — Beispiele für Maxima und Minima. S. 131	
§ 6. Logarithmus und Exponentialfunktion	134
Definition des Logarithmus. Differentiationsformel. S. 134 — Das Additionstheorem. S. 136 — Monotoner Charakter und Wertevorrat des Logarithmus. S. 137 — Die Umkehrfunktion des Logarithmus (Exponentialfunktion). S. 137 — Die allgemeine Exponentialfunktion a^x und die allgemeine Potenz x^a . S. 139 — Exponentialfunktion und Logarithmus dargestellt durch Grenzwerte. S. 140 — Schlußbemerkungen. S. 142.	
§ 7. Einige Anwendungen der Exponentialfunktion	143
Charakterisierung der Exponentialfunktion durch eine Differentialgleichung. S. 143 — Stetige Verzinsung. Radioaktiver Zerfall. S. 144 — Abkühlung oder Erwärmung eines Körpers in einem umgebenden Medium. S. 145 — Abhängigkeit des Luftdruckes von der Höhe über dem Erdboden. S. 146 — Verlauf chemischer Reaktionen. S. 147 — Ein- und Ausschalten eines elektrischen Stromes. S. 148	
§ 8. Die Hyperbelfunktionen	148
Analytische Definition. S. 148 — Additionstheoreme und Differentiationsformeln. S. 150 — Die Umkehrfunktionen. S. 151 — Weitere Analogien. S. 152	
§ 9. Die Größenordnung von Funktionen	154
Begriff der Größenordnung. Einfachste Fälle. S. 154 — Die Größenordnung der Exponentialfunktion und des Logarithmus. S. 155 — Allgemeine Bemerkungen. S. 156 — Die Größenordnung einer Funktion in der Umgebung eines beliebigen Punktes. S. 157 — Größenordnung des Verschwindens einer Funktion. S. 158	

Anhang zum dritten Kapitel.

§ 1. Betrachtung einiger spezieller Funktionen	158
Die Funktion $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$. S. 159 — Die Funktion $y = e^{-\frac{1}{x}}$. S. 159	
— Die Funktion $y = \mathfrak{Lg} \frac{1}{x}$. S. 160 — Die Funktion $y = x \mathfrak{Lg} \frac{1}{x}$.	
S. 161 — Die Funktion $y = x \sin \frac{1}{x}$, $y(0) = 0$. S. 161	
§ 2. Bemerkungen über die Differenzierbarkeit von Funktionen	162
§ 3. Verschiedene Einzelheiten.	163
Beweis des binomischen Satzes. S. 163 — Fortgesetzte Differentiation. S. 164 — Weitere Beispiele für Anwendungen der Kettenregel. Verallgemeinerter Mittelwertsatz. S. 165	

Viertes Kapitel.

Weiterer Ausbau der Integralrechnung.

- § 1. Zusammenstellung der elementaren Integrale 166
- § 2. Die Substitutionsregel 168
Die Substitutionsformel. S. 168 — Neuer Beweis der Substitutionsformel. S. 171 — Beispiele. Integrationsformeln. S. 172
- § 3. Weitere Beispiele zur Substitutionsmethode 173
- § 4. Die Produktintegration 176
Allgemeines. S. 176 — Beispiele. S. 177 — Rekursionsformeln. S. 178 — Die Wallissche Produktzerlegung von π . S. 180
- § 5. Integration der rationalen Funktionen 182
Aufstellung der Grundtypen. S. 182 — Integration der Grundtypen. S. 183 — Die Partialbruchzerlegung. S. 185 — Beispiel. Chemische Reaktionen. S. 186 — Weitere Beispiele für Partialbruchzerlegung. (Methode der unbestimmten Koeffizienten.) S. 187
- § 6. Integration einiger anderer Funktionenklassen 189
Vorbemerkungen über die rationale Darstellung der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen. S. 189 — Integration von $R(\cos x, \sin x)$. S. 190 — Integration von $R(\cos x, \sin x)$. S. 191 — Integration von $R(x, \sqrt{1-x^2})$. S. 191 — Integration von $R(x, \sqrt{x^2-1})$. S. 191 — Integration von $R(x, \sqrt{x^2+1})$. S. 192 — Integration von $R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$. S. 192 — Weitere Beispiele für Zurückführung auf Integrale rationaler Funktionen. S. 192 — Bemerkungen zu den Beispielen. S. 193
- § 7. Bemerkungen über Funktionen, die sich nicht mittels der elementaren Funktionen integrieren lassen 194
Definition von Funktionen durch Integrale. Elliptische Integrale. S. 194 — Grundsätzliches über Differentiation und Integration. S. 196
- § 8. Erweiterung des Integralbegriffes. Uneigentliche Integrale 197
Funktionen mit Sprungstellen. S. 197 — Funktionen mit Unendlichkeitsstellen. S. 197 — Unendliches Integrationsintervall. S. 201

Fünftes Kapitel.

Anwendungen.

- § 1. Darstellung von Kurven 204
Die Parameterdarstellung. S. 204 — Die zu einer Kurve gehörigen Differentialquotienten bei Parameterdarstellung. S. 207 — Übergang zu neuen Koordinatensystemen bei Parameterdarstellung. S. 209 — Allgemeine Bemerkungen. S. 210
- § 2. Anwendung auf die Theorie der ebenen Kurven 210
Der Flächeninhalt in rechtwinkligen Koordinaten. S. 210 — Flächeninhalt in Polarkoordinaten. S. 216 — Länge einer Kurve. S. 217 — Die Krümmung einer Kurve. S. 221 — Schwerpunkt und statisches Moment einer Kurve. S. 223 — Flächeninhalt und Volumen einer Rotationsfläche. S. 224 — Trägheitsmoment. S. 225
- § 3. Beispiele 226
Die gemeine Zykloide. S. 226 — Kettenlinie. S. 227 — Ellipse und Lemniskate. S. 228

	Seite
§ 4. Die einfachsten Probleme der Mechanik	228
Grundvoraussetzungen aus der Mechanik. S. 229 — Freier Fall. Reibung. S. 230 — Die einfachste elastische Schwingung. S. 232 — Die allgemeine Bewegung auf einer vorgegebenen Kurve. S. 233	
§ 5. Weitere Anwendungen. Fall eines Massenpunktes auf eine Kurve .	235
Allgemeines. S. 235 — Diskussion der Bewegung. S. 237 — Das gewöhnliche Pendel. S. 238 — Das Zykloidenpendel. S. 239	
§ 6. Arbeit und Energie	240
Allgemeines. S. 240 — Erstes Beispiel. Massenanziehung. S. 242 — Zweites Beispiel. Spannen einer Feder. S. 243 — Drittes Beispiel. Aufladen eines Kondensators. S. 243	

Anhang zum fünften Kapitel.

Eigenschaften der Evolute	244
-------------------------------------	-----

Sechstes Kapitel.

Die Taylorsche Formel und die Annäherung von Funktionen durch ganze rationale.

§ 1. Der Logarithmus und der Arcustangens	248
Der Logarithmus. S. 248 — Arcustangens. S. 250	
§ 2. Die allgemeine Taylorsche Formel	251
Die Taylorsche Formel für ganze rationale Funktionen. S. 252 — Die Taylorsche Formel für eine beliebige Funktion. S. 252 — Ab- schätzung des Restgliedes. S. 254	
§ 3. Anwendungen. Entwicklung der elementaren Funktionen	256
Die Exponentialfunktion. S. 256 — $\sin x$, $\cos x$, $\text{Sin } x$, $\text{Cos } x$. S. 258 — Die binomische Reihe. S. 259	
§ 4. Geometrische Anwendungen	260
Berührung von Kurven. S. 260 — Der Krümmungskreis als Oskula- tionskreis. S. 262 — Zur Theorie der Maxima und Minima. S. 262	

Anhang zum sechsten Kapitel.

§ 1. Beispiel einer Funktion, die sich nicht in eine Taylorsche Reihe ent- wickeln läßt	263
§ 2. Beweis der Irrationalität von e	264
§ 3. Nullstellen, Unendlichkeitsstellen von Funktionen und sogenannte un- bestimmte Ausdrücke.	264
§ 4. Das Problem der Interpolation und sein Zusammenhang mit der Taylorschen Formel	267
Problemstellung und Vorbemerkungen. S. 267 — Konstruktion der Lösung. Die Steigungen einer Funktion. Die Newtonsche In- terpolationsformel. S. 268 — Zusammenhang zwischen Steigungen und Ableitungen. Restabschätzung. S. 271 — Die Interpolationsformel von Lagrange. S. 273	

Siebentes Kapitel.

Exkurs über numerische Methoden.

Vorbemerkungen	275
§ 1. Numerische Integration	275
Rechtecksregel. S. 276 — Trapezformel und Tangentenformel. S. 276 — Die Simpsonsche Regel. S. 277 — Beispiele. S. 278 — Fehlerabschätzung. S. 279	

	Seite
§ 2. Anwendungen des Mittelwertsatzes und des Taylorschen Satzes . . .	280
Die „Fehlerrechnung“. S. 280 — Berechnung von π . S. 282 — Berechnung der Logarithmen. S. 283	
§ 3. Numerische Auflösung von Gleichungen	284
Das Verfahren von Newton. S. 285 — Regula falsi. S. 286 — Bei- spiel. S. 287	

Anhang zum siebenten Kapitel.

Die Stirlingsche Formel.	287
----------------------------------	-----

Achstes Kapitel.

Unendliche Reihen und andere Grenzprozesse.

Vorbemerkungen	291
§ 1. Konvergenz und Divergenz	292
Grundbegriffe. S. 292 — Absolute und bedingte Konvergenz. S. 294 — Umordnung der Reihenglieder. S. 297 — Das Rechnen mit unendlichen Reihen. S. 300	
§ 2. Untersuchung der Konvergenz und Divergenz	300
Das Prinzip der Reihenvergleichung. S. 301 — Vergleichung mit der geometrischen Reihe. S. 301 — Vergleich mit einem Integral. S. 304	
§ 3. Grenzübergänge und Reihen von Funktionen einer Veränderlichen .	306
Grenzübergänge mit Funktionen und Kurven. S. 306	
§ 4. Gleichmäßige und ungleichmäßige Konvergenz	308
Allgemeines und Beispiele. S. 308 — Kriterium der gleichmäßigen Konvergenz. S. 313 — Stetigkeit gleichmäßig konvergenter Reihen stetiger Funktionen. S. 314 — Die Integration gleichmäßig konver- genter Reihen. S. 315 — Differentiation unendlicher Reihen. S. 317	
§ 5. Potenzreihen	318
Das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe. S. 319 — Die Inte- gration und Differentiation von Potenzreihen. S. 320 — Das Rechnen mit Potenzreihen. S. 322 — Eindeutigkeitssatz für die Potenzreihen. S. 322	
§ 6. Entwicklung gegebener Funktionen in Potenzreihen. Methode der unbestimmten Koeffizienten. Beispiele	323
Die Exponentialfunktion. S. 324 — Die binomische Reihe. S. 325 — Die Reihe für $\arcsin x$. S. 326 — Die Potenzreihenentwicklung von $\arcsin x$. S. 327 — Beispiel für Reihenmultiplikation. S. 327 — Beispiel für gliedweises Integrieren. Elliptisches Integral. S. 327	
§ 7. Potenzreihen mit komplexen Gliedern	328
Einführung komplexer Glieder in Potenzreihen. S. 328 — Ausblick auf die allgemeine Funktionentheorie. S. 330	

Anhang zum achten Kapitel.

§ 1. Multiplikation und Division von Reihen	331
Multiplikation absolut konvergenter Reihen. S. 331 — Multiplikation und Division von Potenzreihen. S. 332	
§ 2. Grenzübergänge, die mit der Exponentialfunktion zusammenhängen.	333
Die Gleichmäßigkeit des Grenzüberganges. S. 333 — Bemerkung über Integration und Differentiation der Exponentialfunktion. S. 334	
— Beweis der Formel $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$. S. 335	
§ 3. Unendliche Reihen und uneigentliche Integrale	336

	Seite
§ 4. Unendliche Produkte	338
§ 5. Weitere Beispiele für unendliche Reihen	340
Verschiedene Entwicklungen. S. 340 — Reihen, in denen die Bernoullischen Zahlen auftreten. S. 343	

Neuntes Kapitel.

Fouriersche Reihen.

§ 1. Die periodischen Funktionen	345
Allgemeines. S. 345 — Zusammensetzung von reinen Schwingungen. Obertöne. Schwebungen. S. 348	
§ 2. Die Verwendung der komplexen Schreibweise	351
Allgemeine Bemerkungen. S. 351 — Anwendung in der Lehre vom Wechselstrom. S. 352 — Komplexe Darstellungen der Superposition von reinen Schwingungen. S. 354	
§ 3. Trigonometrische Interpolation	354
Lösung des Interpolationsproblems. S. 354 — Grenzübergang zur Fourierschen Reihe. S. 359	
§ 4. Beispiele für die Fouriersche Reihe	361
Vorbemerkungen. S. 361 — Entwicklung der Funktionen $\psi(x) = x$ und $\varphi(x) = x^2$. S. 362 — Entwicklung der Funktion $x \cos x$. S. 363 — $f(x) = x $. S. 364 — Beispiel. S. 364 — $f(x) = \sin x $. S. 365 — Entwicklung der Funktion $f(x) = \cos \mu x$. Partialbruchzerlegung des Cotangens. Produktzerlegung des Sinus. S. 365 — Weitere Beispiele. S. 366	
§ 5. Strenge Begründung der Fourierschen Reihenentwicklung	367
Funktionen mit gleichmäßig konvergenter Fourierscher Reihe. S. 368 — Beweis der Darstellbarkeit. S. 370 — Erweiterung des Gültigkeitsbereiches der Fourierschen Reihe. S. 374	
§ 6. Die mittlere Approximation durch trigonometrische Polynome	377

Anhang zum neunten Kapitel.

Beispiele zur trigonometrischen Interpolation	381
Vorbemerkungen. S. 381 — Einzelne Beispiele. S. 382	

Zehntes Kapitel.

Die Differentialgleichungen der einfachsten Schwingungsvorgänge.

§ 1. Schwingungsprobleme der Mechanik und Physik	387
Einfachste mechanische Schwingungen. S. 387 — Elektrische Schwingungen. S. 388	
§ 2. Lösung der homogenen Gleichung. Freie Bewegungen	389
Formale Auflösung. S. 389 — Physikalische Deutung der Lösung. S. 391 — Anpassung an gegebene Anfangsbedingungen. Eindeutigkeit der Lösung. S. 392	
§ 3. Unhomogene Gleichung. Erzwungene Bewegungen.	394
Allgemeine Bemerkungen. S. 394 — Lösung der unhomogenen Gleichung. S. 395 — Die Resonanzkurve. S. 397 — Nähere Diskussion des Schwingungsablaufes. S. 399 — Bemerkungen über den Bau von Registrierinstrumenten. S. 400	
Schlußbemerkung.	403
Sachverzeichnis.	404